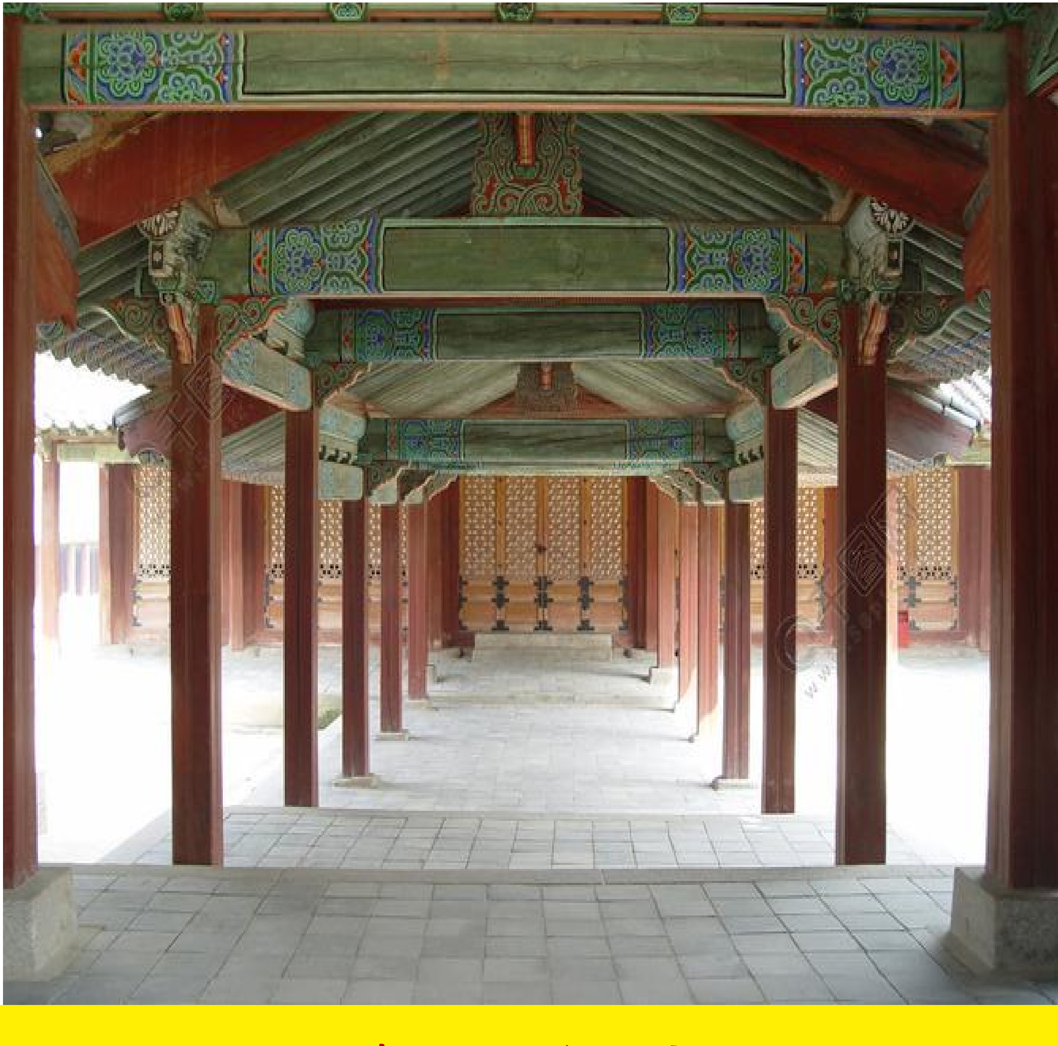


大众力学丛书

结构——人类文明的脊梁

武际可著



作者介绍：武际可山西霍县人，**1934** 年生。北大教授，**2002** 年退休。退休前教过力学专业各门基础课和专业课。退休后对科普饶有兴趣，曾与王振东教授合著《力学诗趣 》，还著有科普书《拉家常 说力学》、《力学史杂谈》、《音乐中的科学》、《伟大的实验与观察》、《谈科技说力学》、《动脑筋说力学》等，并多次获奖。

本书介绍：本书收集了作者关于结构的随笔二十七篇。内容包括结构一般概述、构件、构件连接、结构力学简述、能量与势能的概念、结构的分析计算、结构材料、结构破坏、智能结构、结构设计与一些特殊结构等等。本书可以作为工科师生的参考。本书叙述通俗易读、图文并茂、兼及有关问题的历史知识，所以本书也可以作为对结构知识有兴趣的中学生和广大读者阅读。本书不保留版权，欢迎下载，传播、翻印。引用时，请注明出处。

中国力学学会大众力学丛书

总序

科学除了推动社会生产发展外，最重要的社会功能就是破除迷信、战胜愚昧、拓宽人类的视野。随着我国国民经济日新月异发展，广大人民群众渴望掌握科学知识的热情不断高涨，所以，普及科学知识、传播科学思想、倡导科学方法、弘扬科学精神、提高国民科学素质一直是科学工作者和教育工作者长期的任务。

科学不是少数人的事业，科学必须是广大人民参与的事业。而唤起广大人民的科学意识的主要手段，除了普及义务教育之外就是加强科学普及。

力学是自然科学中最重要的一个基础学科，也是与工程建设联系最密切的一个学科。力学知识的普及在各种科学知识的普及中起着最为基础的作用。人们只有对力学有一定程度的理解，才能够深入理解其它门类的科学知识。我国近代力学事业的奠基人周培源、钱学森、钱伟长、郭永怀先生和其他前辈力学家

非常重视力学科普工作，并且身体力行，有过不少著述，但是，近年来，与其它兄弟学科（如数学、物理学等）相比，无论从力量投入还是从科普著述的产出看来，力学科普工作显得相对落后，国内广大群众对力学的内涵及在国民经济发展中的重大作用缺乏有深度的了解。中国力学学会审时度势，决心采取各种措施，大力推进力学科普工作。除了继续办好现有的力学科普夏令营、周培源力学竞赛等活动以外，还将举办力学科普工作大会，并推出力学科普丛书。2007 年，中国力学学会常务理事会决定组成“大众力学丛书”编辑委员会，计划集中出版一批有关力学的科普著作，把它们集结为“大众力学丛书”，希望在我国科普事业的大军中，团结国内力学界人士做出更有效的贡献。

这套丛书的作者是一批颇有学术造诣的资深力学家和相关领域的专家学者。丛书的内容将涵盖力学学科中的所有二级学科：动力学与控制、固体力学、流体力学、工程力学以及交叉性边缘学科，所涉及的力学应用范围将包括：航空、航天、航运、海洋工程、水利工程、石油工程、机械工程、土木工程、化学工程、交通运输工程、生物医药工程、体育工程等等，大到宇宙、星系，小到细胞、粒子，远至古代文物，近至家长里

短，深奥到卫星原理，优雅到诗画欣赏，只要其中涉及力学，就会有相应的话题。本丛书将以图文并茂的版面形式，生动鲜明的叙述方式，深入浅出、引人入胜地把艰深的力学原理和内在规律，介绍给最广大范围的普通读者。这套丛书的主要读者对象是大学生和中学生以及有中学以上文化程度的各个领域的人士。我们相信它们对广大教师和研究人员也会有参考价值。我们欢迎力学界和其它各界的教师、研究人员以及对科普有兴趣的作者踊跃撰稿或提出选题建议，也欢迎对国外优秀科普著作的翻译。

丛书编委会对高等教育出版社的大力支持表示深切的感谢。出版社领导从一开始就非常关注这套丛书的选题、组稿、编辑和出版，派出了精兵强将从事相关工作，从而保证了本丛书以优质的形式亮相于国内科普丛书之林。

中国力学学会大众力学丛书编辑委员会

2008-4-23

中国力学学会《大众力学丛书》
第二届编辑委员会

目 录

0 前 言

结构，是人类活动的最广阔的领域之一。

结构，是一门工程技术。现今，进入任何一门工程技术领域，都会或多或少与它打交道。土木工程、航空航天工程、机械工程、电机工程、化学工程等专业的大学课程设置无不或多或少包含结构工程的章节。即使新兴的半导体工程，由于封装问题和热应力问题也不得不与结构强度打交道。

结构，伴随着人类文明的进程而发展。而且在人类文明进程中起着骨干作用。所以，结构——人类文明的脊梁。

我原本是学习数学力学的，后来对固体力学有兴趣。有幸与结构工程师打了几十年交道，与他们接触中学到了许多许多，也反过来给了他们一些帮助。在与工程师合作的过程中，深深地体会到从事基础理论的教学与研究的人，与第一线的设计和施工人员建立联系，是非常必要的。只有这样才能更深刻地认识一些理论发展的实际背景。这是作为一个在高等学校教书人的体会。

现在这本小册子中所收集的二十多篇文章，可以说是向结构工程师学习的一些零碎知识的小结。希望它们对于想进入结构行业的人，对于结构有一个初步的了解。它也可以是对于一般想了解结构的读者和中学

生的一本科普读物。

由于笔者毕竟不是结构工程专业出身，书中难免说错话或外行话或错漏。敬请读者不吝指正。

附记：本书有一部分插图来自网络。作者向没有具名的图像原作者和上传网络者表示谢意。

武际可
wu_jike@pku.edu.cn
2021,3,30

1 漫话结构

结构这个词，无论我国还是西方，来源都是从民用建筑来的。我国早在三千年之前的《周礼》这部书的《考工记》中就已经记载了各种建筑的形制。到了汉代在王延寿的《鲁灵光殿赋》中说：“于是详察其栋宇，观其结构。”出现了结构这个词，意思是把建筑用材和构件按照一定要求搭接在一起的建筑。我国宋代李诫在两浙工匠喻皓《木经》的基础上编成的《营造法式》是北宋官方颁布的一部建筑结构设计、装修、施工的规范书。在西方的语言里结构（structure）这个词，也有把物件系统地组合到一起的意思。

“结构”这个词后来被移植应用于许多领域，在物理学中有原子结构、物质结构，在化学中有分子结构、蛋白质结构，在生物学中有组织结构、结构生物学；在天文学中有宇宙结构、星云结构；在数学与计算机科学中有数据结构、结构数学；在地学中有地壳结构、板块结构；在语言学中有语法结构；在文学中有小说结构、叙事结构；在美术中有绘画结构、美术结构化；在书法中有间架结构；在哲学中有结构主义；等等。它们的意义都是从把单元有系统地组合到一起这个意思引申出来的。结构这个词能够被延伸应用得如此广，可见结构原始意义的重要和它对于人类生活的深远影响。

随着结构种类的多样化和复杂化，结构的概念也在扩展。目前，所谓结构，是指凡是能够承受一定荷载的固体构件及其系统的人造物都统称为结构。从更广义的意义上说，凡是承受一定载荷的固体构件及其系统自然物，如植物的根、茎、叶、动物的骨骼、血管、地壳、岩体等也可以看作结构。通常，结构都会赋予不同的功能，例如防雨、遮阳、展厅、住房等等，但不管它有什么功能，首先需要具有承载载荷的功能。所以研究与设计结构，最重要的任务就是要求结构具有足够的承载能力。

平常我们看到的建筑物，有时看到的是它的外装修而不是它的承力结构。就拿中国古建筑来说，它屋顶上的瓦就不是承力结构，它内部的梁、柱、椽、檩等才是承力结构，一般情况下，它的墙也不是承力结构。再举竖立在纽约的自由女神那座巨大的雕塑来说，我们看到的都是它的铜质表皮的外装修，其实支撑它的承力结构是隐藏于内部的巨大的桁架。

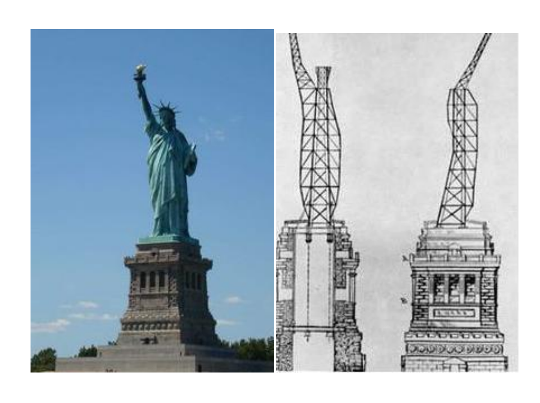


图 1 自由女神像与它的承力结构

可以毫不夸张地说：结构是人类文明的脊梁。人类从穴居野处进步到“凿户牖以为室”的盖房子住，这是迈向文明的一大步，要造房子，就有最早的承力结构。几千年来各种建筑风格的内外装修，都是附着在结构上才能够表现出来。音乐的发展需要逐渐成熟起来的音乐厅，工业的发展依赖于各种专用的厂房建设、依赖于各种工程结构的出现。戏剧、电影的发展有赖于剧场和演播厅的建设，绘画和雕塑的发展则有赖于陈列厅的建设，而这些厅堂的建设又是取决于相应的结构。所以，人类的文明是依托于结构的发展而进步的，结构是人类文明的脊梁，此话不假。

结构的发展紧密地和结构材料与结构力学有关。前者可以看作结构工程的硬件，后者可以看作结构工程发展的软件。

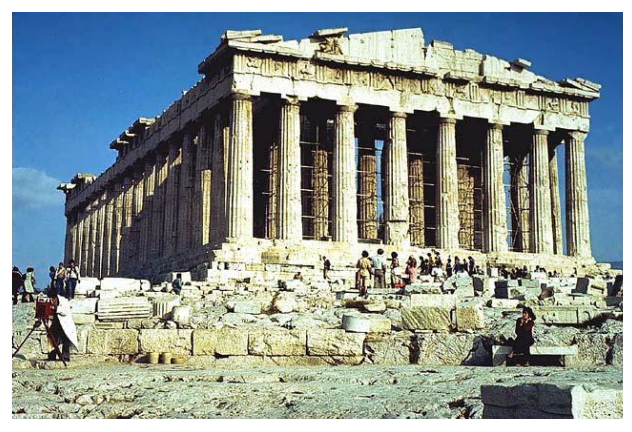


图2 雅典女神庙,坐落于雅典卫城,建于438B.C.

首先是材料，在几千年的结构发展过程中，最早结构材料是木材，后来是砖石与木材，直到18世纪之后才逐渐有了混凝土、钢材，以之作为主要的结构材料。到20世纪，结构材料就更多了，铝合金、高分子材料、复合材料、玻璃都是使用得很多的结构材料。

图2是古希腊坐落在雅典卫城。建于公元前438年的雅典女神庙。主体结构基本上用的是石材。这是由于在希腊，当时石材比较方便。图3是河北赵县的赵州桥，桥长50.82米，跨径37.02米，券高7.23米，两端宽9.6米，栱长37.4米，建于隋朝大业年间（公元595年－605年），由著名匠师李春设计建造，距今已有1400多年的历史，是当今世界上现存最早、跨度最大、保存最完整的古代单孔敞肩石拱桥。



图3　赵州桥.

在古代的中国，木材一直是建筑结构的主要用材。唐代白居易写的《阿房宫赋》描写秦时建的阿房宫的富丽堂皇。文章开首第一句就说：“六王毕，四海一，蜀山兀，阿房出。”意思是说，秦始皇统一中国后，盖阿房宫，把蜀山的树木都砍光了。形象地说明当时建筑结构大量地使用木材的情形。木材为主要结构的建筑，经不起腐蚀、火灾和兵乱，所以不像古希腊以石材为主的建筑至今两千多年，还能够看出当年建筑的大致模样。我国的古建筑多以木材为主要结构，秦汉时代的建筑已见不到踪迹，现存最早的木结构建筑应当是经过梁思成、林徽因夫妇认证的五台山的南禅寺了。它距今已有 1200 多年的历史（图 5）。图 4 是山西应县佛宫寺释迦木塔，建于公元 1056 年，距今已经接近一千年了。释迦塔塔高 67.31 米，底层直径 30.27 米，呈平面八角形。全塔耗材红松木 3000 立方米，纯木结构，无钉无铆。

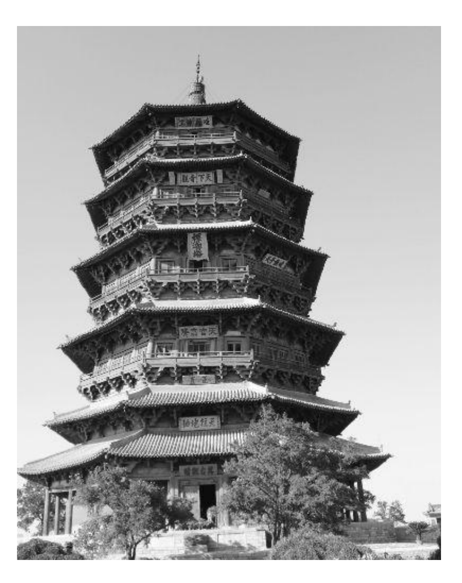


图 4 应县佛宫寺释迦塔

释迦塔除经受风霜雨雪侵蚀外，还遭受了多次强地震袭击，仅烈度在五度以上的地震就有十几次。能历千年不倒，说明结构上的合理性。

我国以砖瓦为结构材料历史悠久，早在 5500 年前就已经有了现在形体的砖。4000 年前就有了瓦。到了秦代，砖成了木材以外的最重要的结构材料，到了汉代，瓦也发展得很成熟，所以俗语有“秦砖汉瓦”之说。就是说到秦汉时代不仅砖瓦烧制技术已经成熟，而且发展出雕砖和瓦当的艺术门类。雕砖是中国古建雕刻艺术及青砖雕刻工艺品，在青砖上雕出山水、花卉、人物等图案，是古建筑雕刻中很重要的一种装修艺术形式。主要用来装饰寺、庙、观、庵及民居的构件和墙面。通常也指用青砖雕刻而成的雕塑工艺品。瓦当是古代中国建筑中覆盖建筑檐头筒瓦前端的遮挡。特指东汉和西汉时期，用以装饰美化和蔽护建筑物檐头的建筑附件。瓦当上刻有文字、图案，也有用四方之神的“朱雀”“玄武”“青龙”“白虎”做图案的。图 5 的南禅寺正殿就是砖瓦与木材混合的建筑。而图 6 是五台山显通寺的无梁殿，纯粹是由砖材卷成栱形结构组成。外观是两层结构，实际是一个一层的穹窿栱洞，栱洞由一块块青砖垒砌，边往上砌边收缩。通高达 20.3 米，面宽 28.2 米，进深达 16.2 米，建于明代，全部是栱结构套栱结构组成（图 6），其结构之巧思，为国内仅见。



图 5 五台山南禅寺正殿



图 6 五台山显通寺的无梁殿



图 7 显通寺无梁殿的内部结构图

1774 年，英国工程师斯密顿（J.Smeaton）在建造海上灯塔时以石灰、粘土、砂混合物砌基础，效果很好。1824 年英国石匠营造者阿斯普丁(J. Aspdim, 1779-1885)取得了烧制水泥的专利，因其与波特兰地方的石材很相近，所以称为波特兰水泥。法国 1840、德国 1855 设水泥厂。所以到 19 世纪中叶混凝土就开始大量生产，混凝土一旦来到世界上，就立即成为主要的建筑结构材料，产量迅速增长，据统计，直到 1970 年世界每人每年使用水泥 156 公斤。 与混凝土几乎是同时，19 世纪中叶之后,炼钢技术得到普及，人们学会了大量生产钢材，于是在结构上普遍采用钢铁。钢结构的桥梁、钢板制造的船舶军舰等大量出现，随后又发明了钢筋混凝土作为主要的结构材料。大约在同一时期，关于结构及其构件的力学

行为的学问——结构力学也得到了发展与成熟。

我们在前面列举的几样建筑结构，都是人类几千年积累的经验和智慧的结晶，其宏伟和设计的精妙，都会让人叹为观止。可是，在进入 19 世纪，在人类有了混凝土和钢铁，特别是在指导结构设计的结构力学达到成熟之后，人类的结构起了翻天覆地的变化，新的结构、新的高度、新的跨度不断翻新，令人目不暇接。现在就让我们举一些例子，领略一下在新的条件下结构的变化。

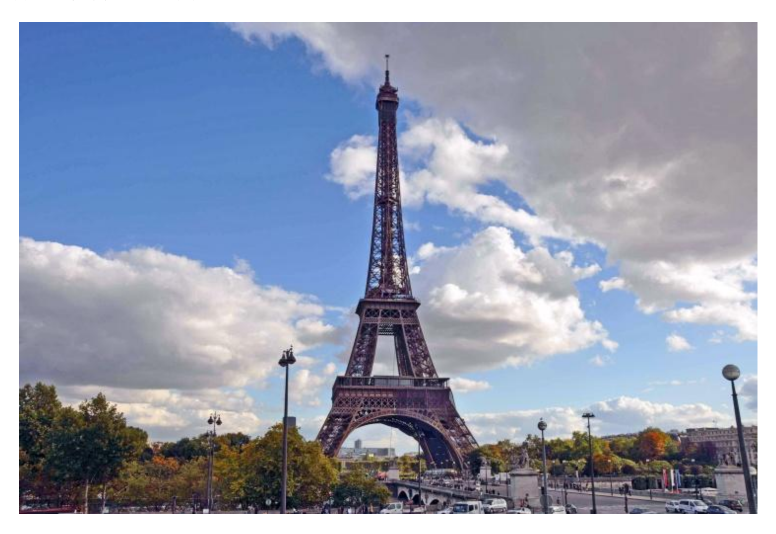


图 8 巴黎埃菲尔铁塔

图 8 是著名的巴黎埃菲尔铁塔，是为了纪念 1789 年法国大革命 100 周年，在巴黎举行的世界博览会开幕前落成的，得名于设计它的著名建筑师、结构工程师古斯塔夫·埃菲尔（Gustave Eiffel ，1832-1923)。

铁塔全部是预制的钢构件连接而成，高 300 米，天线高 24 米，总高 324 米。钢铁构件有 18038 个，施工时共钻孔 700 万个，使用铆钉 250 万个。除了四个脚是用钢筋水泥之外，全身都用钢铁构成，塔身总重量 7000 吨。塔分三楼，分别在离地面 57.6 米、115.7 米和 276.1 米处，其中一、二楼设有餐厅，第三楼建有观景台，从塔座到塔顶共有 1711 级阶梯。铁塔的设计，除了需要精确的力学计算和分析外，还需要把每一个部件的尺寸仔细校准，并画出图纸，全部设计总共画出约 5000 张图纸。它是钢铁作为结构材料之后出现的钢结构的代表性作品之一，也是现代结构力学的胜利。

铁塔的设计者埃菲尔，毕生主要贡献是设计了许多著名的钢结构工程，巴黎铁塔之外，还有几座著名的钢结构的桥梁和纽约自由女神的钢结构支架。可以说他是一位钢结构时代的代表性的工程师。



图 9 埃菲尔像

1871 年 10 月 8 日至 10 日芝加哥市一场大火，约 6.5 km^2 土地上的市区（包括商业区）建筑物几乎全部被烧光。火灾之后重建，恰好是新结构材料与新结构设计来到世界上寻求用武之地的时期。于是在这里产生了世界上第一栋采用钢构架的摩天大楼，以此开始了芝加哥不断创新的城市建筑在世界范围的声誉。1893 年，芝加哥主办的世界哥伦布博览会的成功，使芝加哥的“摩天大楼”迅速向纽约、向世界各大城市扩散。今天，在芝加哥 40 层以上的楼厦就有 50 多座，1973 年竣工的西尔斯大厦（图 11），高 443 米，是当时世界上第一高楼。。



图 10 芝加哥的摩天大楼



图 11 这座凌空的玻璃房位于芝加哥西尔斯摩天大楼的 103 层，距离地面 412 米，整体用厚达 1.5 英寸的透明玻璃制成，可承受 5 吨的重量。玻璃房高 10 英尺，宽 10 英尺。

有了新的材料，并不是单靠这些新材料的堆砌就能够建造出新型的结构的，还需要在发展到新的水平的结构力学的指导下才会有竞争力的新结构出现。大跨度的桥梁（图 12、14、15）、新型的殿堂结构（图 13）、航空结构（图 16）、新的大型机械（图 17）、大型轮船（图 18）、巨型火箭（图 19），没有精细的结构分析和计算，没有现代的结构力学理论作为指导，是不可能成功的。结构新材料和结构力学的研究，这是现代结构发展的两翼。人类 21 世纪的结构，将在这两翼的支撑下，向更高的结构水平展翅飞翔。



图 12 建于 1888 年的巴黎跨塞纳河的钢结构栱桥
其矢高与跨度之比为 1/17，大桥的跨度为 350 英尺

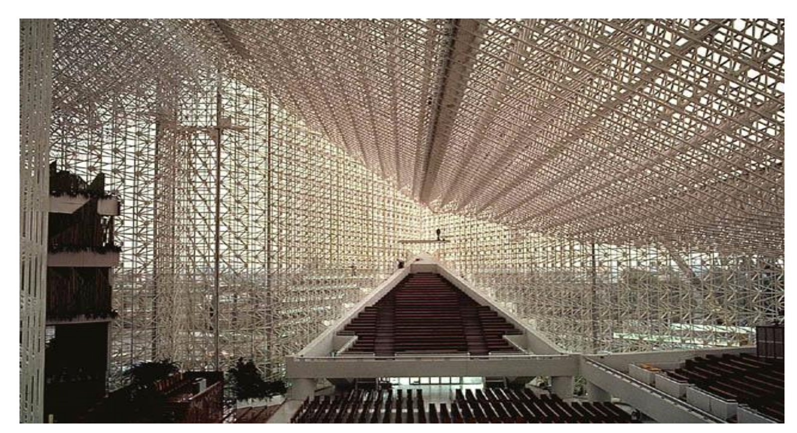


图 13 建于 1980 年的美国加州的一座宗教建筑，可容纳 3000 个座位



图 14 竣工于 1937 年的旧金山金门大桥，跨度 4200 英尺



图 15 上海的斜拉式南浦大桥，主跨 423 米



图 16 空中客车



图 17 大型汽轮机转子



图 18 大型客轮



图 19 巨型火箭

2016，8，19

2 谈 构 件

前面我们说过，结构是把固体构件组织在一起的承力的系统。那么紧接着的一个问题就是，结构中最常见的是些什么构件呢？

最常见的构件是这样三类: 1）绳、柱、杆、梁这种沿一个方向伸长其他两个维度很小的条状构件；2）板、壳是一个维度很小，两个维度比较大的，即比较薄能够覆盖一定面积的构件；3）块体构件，即构件的三个维度大小相去不远的构件。

我们后面会了解这样分类的道理，这是从结构分析的角度来考虑的，不同类的构件的力学分析形成了不同的结构力学学科。因为第一类构件可以简化为仅仅以构件的长度为参数来定位构件上点的位置，也就是说在最复杂的情况下可以用常微分方程来描述它们的待求力学量；第二类构件可以简化为以两个参数来定位构件上点的位置，一般求解它 就需要和二维偏微分方程或偏微分方程组打交道；对于块体结构，就需要与三维空间的偏微分方程组打交道了。对应于这三类构件，形成了三类不同的结构力学学科。通常的材料力学和杆系结构力学处理的是第一类构件和由这些构件组成的系统；板壳理论是专门针对第二类构件形成的力学分支学科；而对第三类构件的问题就需要弹性力学、塑性力学等专门的学科来解决了。



图 1 长陵祾恩殿剖面图

第一类构件中，最常见的就是柱和梁，它们在几千年的古建筑中已经形成定式，所谓横梁竖柱。就是说在结构中横向布置，承受重力所引起的弯曲作用的称为梁，屋脊的主梁称为栋。图 1 是明长陵的祾恩殿，是目前中国为数不多的大型楠木殿宇。它面阔九间(通阔 66.56 米)，进深五间(通深 29.12 米)，象征着皇帝的“九五”之位。由 60 根楠木大柱支撑殿顶，中央四根大柱的直径达 1.17 米，殿面阔超过了故宫太和殿。从图上能够清楚地看出梁和柱的分布和相互搭接的构造。

梁在近代结构中，十分重要用得也很普遍，图 2 为湘桂铁路上的志城大桥。它是一座变截面的连续梁。像这种一根梁支撑在多个支座上的梁，称为连续梁，它的分析要比一根梁简单地支撑在两端的简支梁要来

得复杂一点。梁与柱的受力特点不同，柱是受沿着柱的轴向方向的外力的构件，而梁所受的外力是垂直于轴向的。从这种受力特点来看，帆船上的桅杆、汽车的底盘、在大风作用下的高耸的烟筒、飞机的机翼、漂浮在有波浪起伏的水面上受浮力作用的大船、起重机的吊臂等等，都可以看作梁。由于有的梁并不是由一根密实的同一材料组成的杆状固体，而是由许多不同的构件组成的结构体系，这样的梁也称为组合梁或复合梁。



图 2 湘桂铁路志城特大桥的连续梁

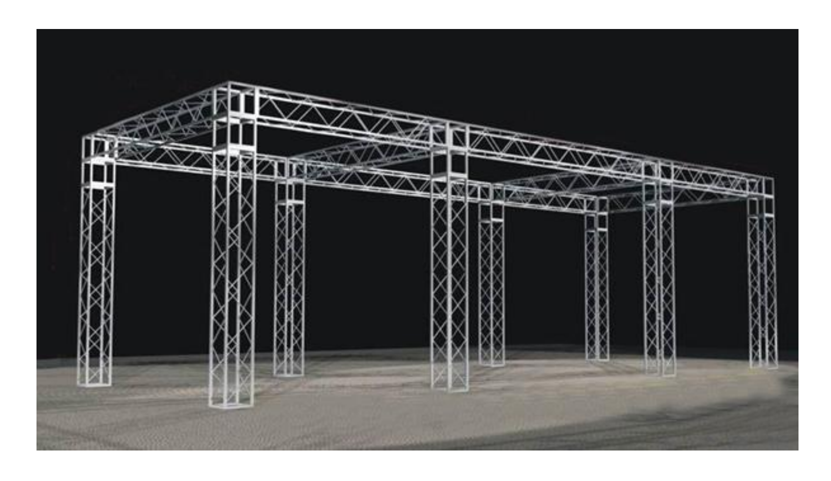


图 3　由杆件组成的桁架

图 3 所示的结构，无论是作为梁的组合构件，还是作为柱的组合构件，都是由许多直杆组成，这样的结构体系称为桁架，它的基本构件只是由受拉压的杆组成。它的受力分析归结为杆系结构力学。

在承力结构的构件是弯曲的杆时，这种结构就称为拱。图 4，是一个典型的拱结构。此外如上一节我们提到的赵州桥、五台山显通寺的无梁殿，那种由砖石砌成的拱圈形的结构，也称为拱。对于拱来说，构件主要经受压力，有时是受弯曲和受压联合作用的。

如果构件只能承受拉力，不能承受弯曲，也不能承受压力，这种构件就称为绳索，一般吊桥的主要承力构件就是悬挂在支座塔上的两条钢索。它们是柔软不承受压力和弯曲的构件。



图 4 栱结构

在第二类构件中用得最为广泛的就是板。板是其中面是一张平面的构件。所以又称为平板。通常钢材、木材为了使用方便都事先加工成板材。板如果是承受垂直于板面的荷载的，就称为板，如果只承受平面内的载荷，即载荷作用方向处于中间平面内，在民用建筑中这种构件称为剪力墙。民用建筑的楼板、飞机的蒙皮、轮船的甲板等都是用的是板构件。

图 5 是发电厂的两座大型冷却塔，其中一座塔筒已建好还未运行另一座塔筒正在施工。这种冷却塔，目前已经有的高达 200 米，直径最大的地方有一百大几十米，但是它最薄的地方厚度只有二十公分左右。是典型的薄壳结构。对于它的设计，首先要考虑的是经受风载荷的强度，

其次由于塔内外温度差比较大，还要考虑热应力，最后地基与地震的影响也要认真分析。图 6 是 1965 年 11 月 1 日英国菲尔桥电厂在大约八级风作用下八座冷却塔中倒塌三座冷却塔的情形，其他几座未倒塌的也产生很严重的裂缝，造成英国这一地区停电。后来经过研究认定是由于强度设计不够，设计风压比英国设计规范要求的塔顶的风压要低出 19%。随后在世界各国还有由于地基问题和施工问题大塔倒毁事故的报导，可见对于薄壳结构设计中的受力分析多么复杂和重要。

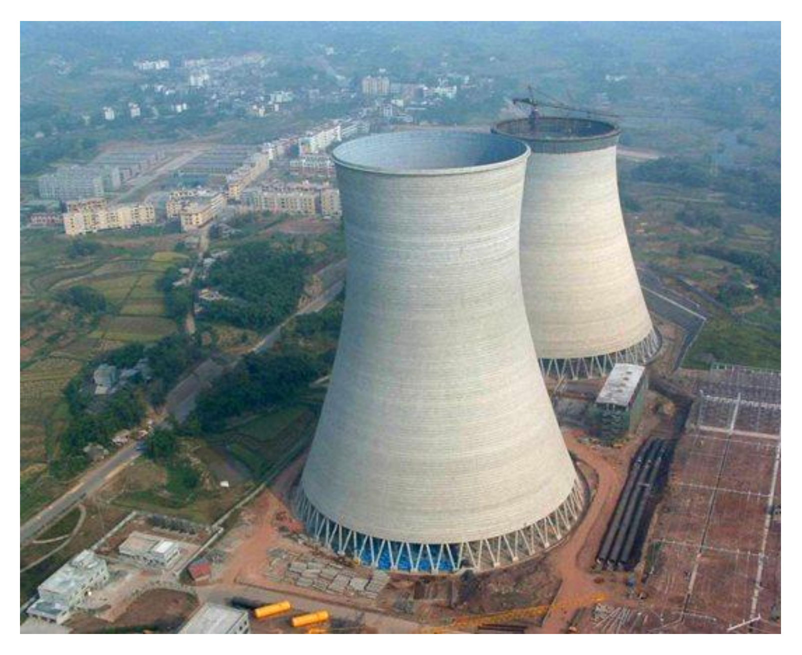


图 5 发电厂的大型冷却塔

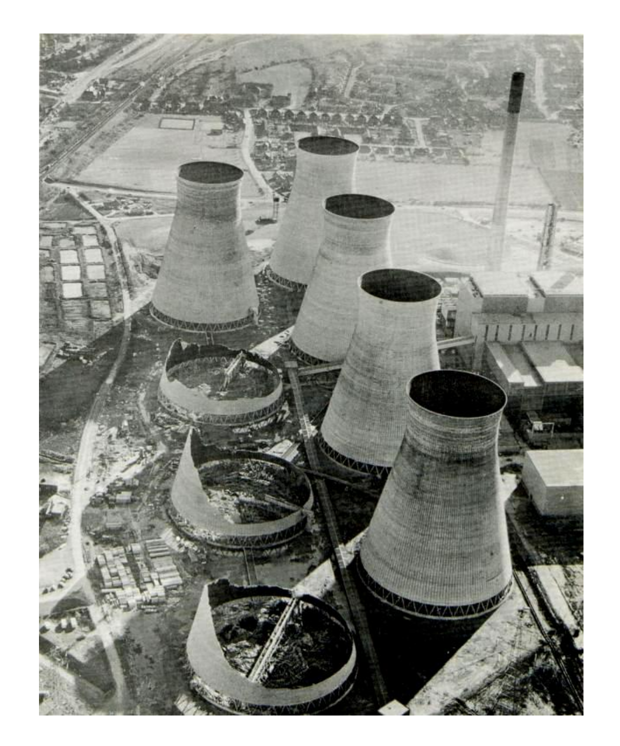


图 6　1965 年 11 月 1 日，英国菲尔桥八座大型冷却塔

在大风中倒塌的三座冷却塔

随着结构的进步，愈来愈多的薄壳结构被各行各业采用。汽车的外壳、大型储油罐、火箭和导弹的主体结构、飞机的机身与船舶的外壳、大型汽轮机的外壳、水塔、化工的反应釜、锅炉、储气罐、薄壳屋顶等等，都是薄壳结构。最近兴起的充气薄膜结构，其实也可以算作一种特别的薄壳结构它是每一个局部都只能承受张力而不能承受压力的结构。

在自然界也有许多薄壳结构，据了解，为了减少鸡蛋的运输与包装过程中的损耗，对于鸡蛋壳在撞击时的强度问题，就有一些单位在进行理论和实验研究。

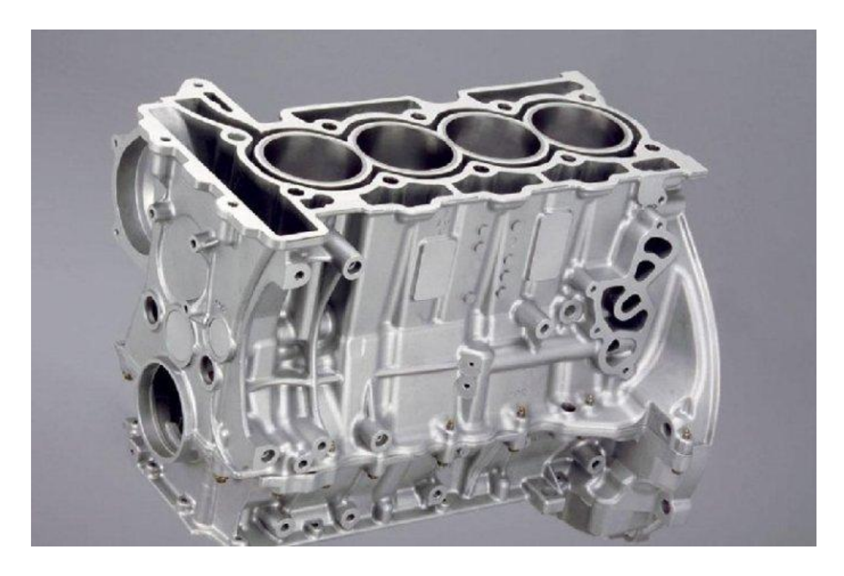


图 7 内燃发动机的气缸

图 7 是一组内燃发动机的气缸。它是典型的块体结构。对于像这样的块体结构，要分析它的受力是很复杂的。图 8 是经 12 年于 2006 年建成的三峡大坝，是一座混凝土重力坝。坝体内还有安装水轮机和发电机的厂房，所以也是一个典型的块体结构。

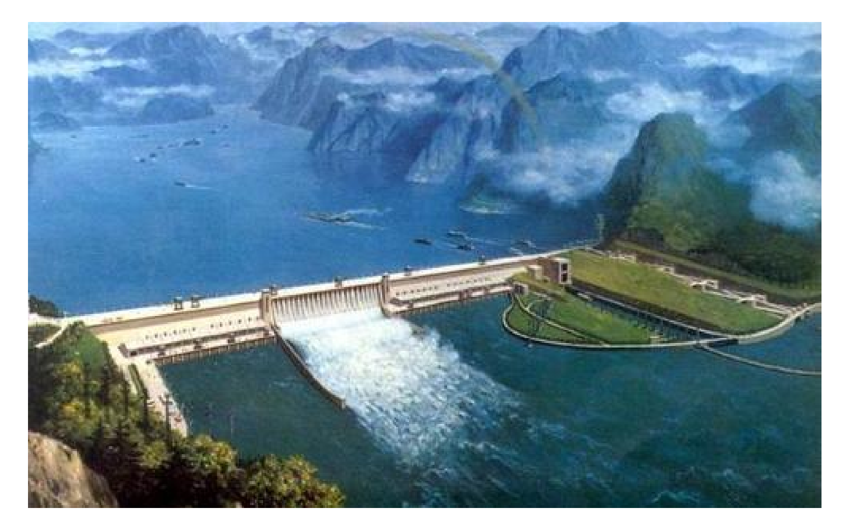


图 8 三峡水库的大坝

在半个世纪以前，对于一般的块体结构几乎还没有有效的应力分析手段。已有的手段无非是在设计时做一个模型在近似受力的情况下，通过测量模型的变形来得到设计时可参考的结果。在结构运行时，布置一些测点，来观测它的变形。这样的手段既费时又费力，效果还很不理想。完全不能适应日益复杂的结构系统的分析要求。

山穷水复疑无路，柳暗花明又一村。在计算机普及之后，大约在上世纪六十年代开始，人们发展了一种“有限单元法”去分析任何结构包括梁板壳的应力与变形。基本思想是把结构假想地剖分为很多单元体，对每个单元设置若干未知量采取近似地表达式表述其变形，然后根据外

力、单元的材料性质、单元之间的连接和平衡条件得到一组规模很大的方程组，未知量个数可以达到数万乃至数百万，用计算机求解这些方程组，便可以得到这个块体结构的变形与应力分布。按照这种思想编制的通用和专用软件很快地形成了一个有相当规模的产业。用这种软件在设计之前对各种设计方案进行计算，已经成为设计的最重要的环节。有限单元法的产生与发展可以说是在计算机时代的结构力学，在它的指引下，结构设计变得愈来愈合理、结构的功能愈来愈强大、结构设计的工作量愈来愈减小，空前地加速和改善了结构工程的发展。

2016，8，20

3 说 梁

梁，它的概念形成很早。中国在春秋战国时期的文章中就有梁的概念。《国语》上说：“造桥为梁”。人类有记载的桥梁据说是公元前 18 世纪在巴比伦建造的一座拱桥。可以想象，用木头搭的简单的桥还会更早。

在汉字中，梁的金文是如下图的象形字。右半是一座桥，左半是水。梁字下面的木字是后来加上去的。再后来人们又加了一个木字，写成“樑”。在英文中 beam 这个字是梁的意思。它的原来的意义中有“树”的意思。可见无论东方还是西方，古代的梁都是木质的，后来才有钢梁、钢筋混凝土梁和其他材料的梁，等等。



图 1　金文“梁”字

人工建造的房屋上的屋梁恐怕比桥梁还要早。中文的“梁”字，最早就是从桥梁和屋梁来的。房屋屋脊上那根重要的梁，一般称为栋。《易》经上说“上栋下宇”的栋，就是指的房屋的脊梁。我们经常说栋梁之才，就是从这里引申出来的意思。

中国在明末翻译外国的力学知识时，把力学翻译为“重学”是很有道理的。因为在动力学的概念还没有形成之前，古代人们最通常打交道的力就是重力。而承受重力的结构，也主要是两种：即梁和柱。它们的形状都是柱或杆状，区别是梁的重力作用线垂直于柱的轴线，而柱的重力作用线平行于柱的轴线。在以砖石和木材为主要建筑材料的时代，柱的承载能力比较高，“立柱可以支千钧”，所以很少有压垮柱的事故。而梁就不同了，大部分的事故出在梁上。所以以前民间建筑房屋时，将“上梁”看作大事，一定要挑选吉利日子，举行严肃的仪式和庆典，以表示对上梁这道工序的重视。所以梁也是力学最早研究的对象之一。

其实，梁岂止在屋梁和桥梁上见到呢，我们日常见到的横向受载的柱状物体多得不可胜数。古时常用的扁担、轿杠、旗杆、桅杆、推磨的磨杠、起重的撬杠都是梁。现今建起的摩天楼、烟筒、电视塔、电线杆在地震时，惯性力是横向作用的，它们所受的风载也是横向作用的，所以都可以看为梁。汽车、火车底盘上有梁，轮船的船身可以看作在浮力

与重力作用下的复合梁，飞机的机翼是空气动力作用下的悬臂梁，而机身则是在机翼向上作用力与机身重力作用下的梁。竹、木、庄稼等植物的茎，在风作用下也是梁。动物的骨骼、脊柱在它们横向受力时，也是梁。

正因为梁的普遍性和重要性，所以梁的精确研究和梁的精确概念的形成，是整个材料力学、结构力学和弹性力学最早的事件。也是人类技术科学进步的大事。

§1 伽利略、马略特与胡克的工作

最早系统研究梁的著作是伽利略（Galilei Galileo,1564－1642）在1638年出版的《关于两门新科学的对话》〔1〕，这本书写的一共是三个人在四天中的谈话，其中的第二天就全部是讲梁的强度问题的。在这本书中，伽利略提出了关于柱、梁和杆的强度方面17个命题。涉及梁有8个命题，实质上提出的是两个问题：一个是悬臂梁的强度问题，另一个是在自重作用下等强度梁的问题。这两个问题一直影响后来近二百年的研究。

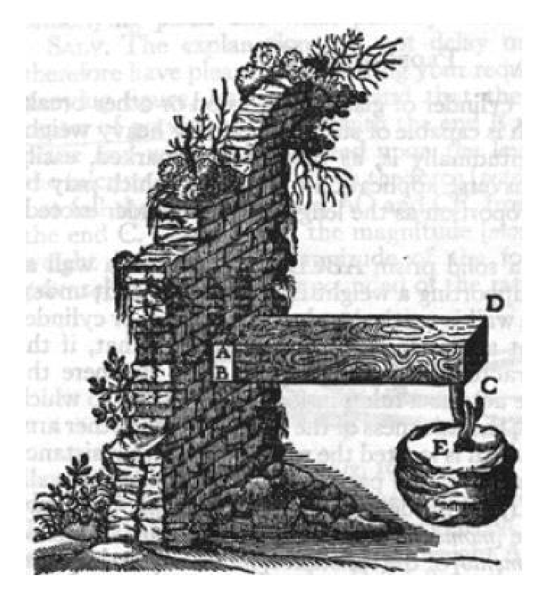


图 2　伽利略《关于两门新科学的对话》中悬臂梁的插图

伽利略并没有正确解决他提出来的问题。在讨论悬臂梁的强度的论证时，隐含了两个错误，一是把根部 AB 上的拉应力看作是均布的，二是把梁的中性层取在梁的下侧。不过由于他在讨论力的平衡时所用的平衡条件是对的，所以也得出了一些正确的结论。如说等长圆截面梁的强度与截面直径的三次方成正比等。

据 1886 年出版的托德汉塔（I.Todhunter，1820-1884）所写的《弹性理论与材料力学的历史》〔2〕一书的第一部分评论说，他的错误是假定了梁的纤维是不可伸长的，因而还没有中性层的概念，实际上是把梁

的下面的纤维误认为是中性层。这说明，梁既然是变形体，如果不考虑梁的变形，在理论上是不可能彻底解决梁的强度和变形问题的。

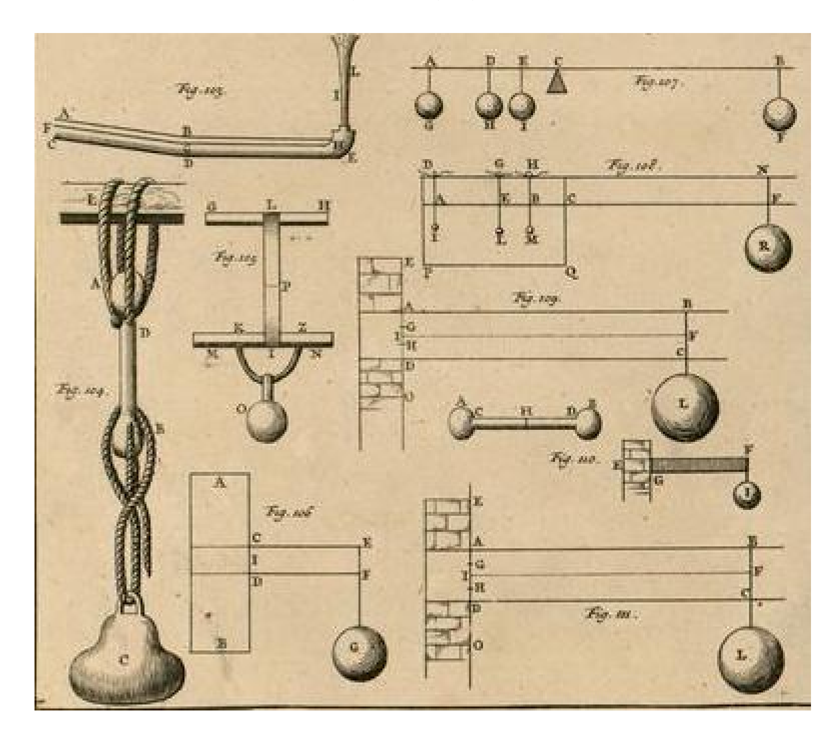


图 3　马略特原著中关于梁的实验的插图

法国学者马略特（E.Mariotte,1620－1684）在 1686 年出版了研究输水装置的著作《论水和其他流体的运动》〔3〕，这本书是第一部研究流体阻力的著作，在书的第 5 部分中，讨论了固体的抗力和水管的强度问题。在伽利略关于梁的断裂抗力的结论中有

$$W = \frac{1}{2}\frac{Td}{L}$$

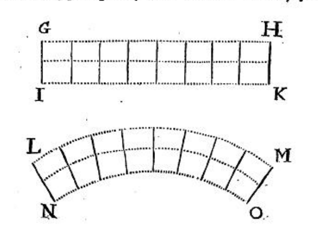
其中 W 是悬臂梁端的断裂载荷，T 是通过悬臂梁底中心纵向作用力，d 是梁高或梁的直径，L 是梁长。马略特实际做了实验来确定梁的抗力，得到的结果是

$$W = K\frac{Td}{L}$$

马略特得到的 K 为 1/3 或 1/4。

马略特的讨论比起伽利略进了一步，伽利略认为在梁的截面上应力是均匀分布的，而马略特则认为应力是从梁的下面纤维起沿高度是线性分布的。马略特的结果虽然比伽利略进了一步，但 K 的值还是不正确的。因为他同样没有精确考虑梁的变形，而且与伽利略一样也默认中性层是在梁的下侧。

Having thus explained the moſt ſimple way of ſpringing in ſolid bodies, it will be very eaſie to explain the compound way of ſpringing, that is, by flexure, ſuppoſing only two of theſe lines joyned



together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminiſhed in proportion to the flexure, and conſequently the ſame proportions and Rules for its endeavour of reſtoring it ſelf will hold.

图 4　胡克《论弹簧》中的一段话与插图

1678 年，英国学者胡克（Robert Hooke，1635－1703）出版了他的著名的著作《论弹簧》〔4〕，书中不仅叙述了他对各种材料弹性实验的结论，还描述了一根受弯曲的杆的变形。他正确地指出，在弯曲时杆的一侧的纤维伸长，另一侧被压缩。不言而喻，按照胡克得到的弹性定律，梁截面内的应力分布应当是以梁的中性层为零的线性分布，即一侧受拉另一侧受压。不过这个思想他没有进一步展开，也仅是如上图所说为止。

亚·沃尔夫（Abraham Wolf，1877-1948）在他 1935 年出版的《十六、十七世纪科学、技术和哲学史》〔5〕一书中，把伽利略、马略特和胡克的理论得到的应力分布列在图 5 中：

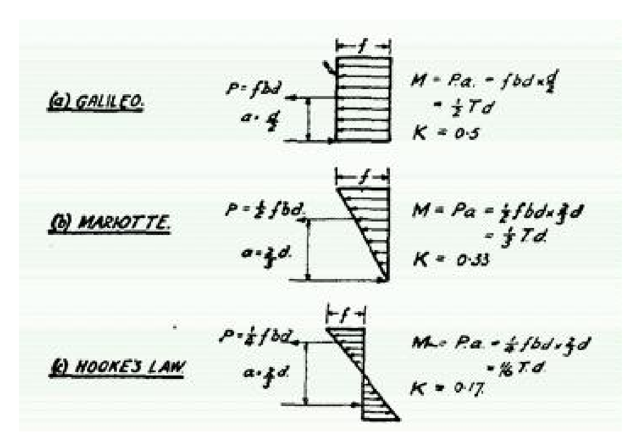


图 5　亚·沃尔夫根据伽利略、马略特和胡克的

表述画出的应力沿截面分布图

§2 瓦利农与伯努利的工作

从以上关于梁的研究中，我们看到，要精确解决梁的强度问题，必须涉及梁的变形的精确描述。而关于梁的变形问题，虽然在达·芬奇（Leonardo Da Vinci,1452－1519）的笔记中、在荷兰物理学家和力学家比克门（Beeckman I.）于 1620 年的描述中、在 1684 年莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz,1646－1716）关于固体抗力的论文中、在胡克 1678 年关于弹簧的论著中，都先后提及。但都是定性的描述，而没有精确的表述。

法国数学家瓦利农（Pierre Varignon，1654-1722）是在法国早期研究和发展数学分析的学者，他在静力平衡和分析方面都有重要的贡献。他沿着伽利略和马略特的思路对梁进行讨论，在 1702 年他发表的关于固体抗力的论文，把梁内不同层的纤维有不同的伸长，认为对应的应力也在变化，他用积分工具来求这些应力的合力，并且比较了伽利略和马略特的结果。遗憾的是他仍然默认了梁的下侧为中性层的位置，所以结果也是不对的。

从变形角度第一次比较精确的研究梁的问题，应当说是从雅科比•伯努利（Jacob Bernoulli，1654-1705）。在 1694 年的论文《弹性梁的弯曲》以及他在 1705 年的论文中，不是像以前研究梁从应力出发，而是最

早用微积分工具研究梁的变形。他假定梁在变形时梁的横截面保持平面，这就是平截面最早的提法。由此，他得到了悬臂梁的变形的微分方程

$$C\frac{1}{r}=Px$$

这里 r 是梁的曲率半径，P 是梁端的荷载，x 是所计算曲率的地方与梁端的距离，C 是常数。雅科比•伯努利得到的 C 是

$$C=\frac{mbh^3}{3}$$

这里 b 和 h 分别是梁的宽与高，m 是材料的弹性常数，即现在说的杨氏模量。

平截面假定是材料力学的重要假定，因为它抓住了梁的变形的主要特征。所以后人把基于平截面假定的梁的理论称为伯努利梁。

不过，伯努利并没有彻底解决梁的问题，原因是，他对中性层的位置仍然没有跳出马略特的思路。所以他的常数 C 定得还不对。这一点从他 1705 年文中如下的插图可以清楚地看出，他的中性层画的地方还是不正确的。另外，由于在他所得到的微分方程中，是用的曲率的表达式，而没有根据位移的微小性加以简化处理，所以在实际工程中也没有得到广泛应用。

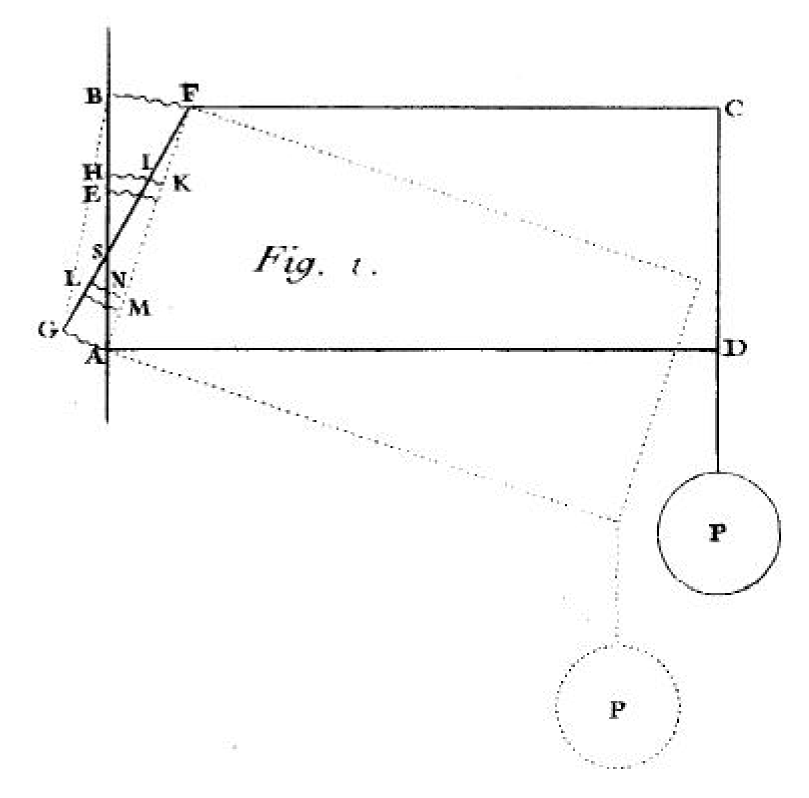


图 6　伯努利 1905 年关于梁的论文的插图

§3 帕朗、纳维与后继的工作

直到伯努利的研究，虽然对于梁的变形有了比较准确的描述。但一直被一种错觉所支配，即认为在弯曲时梁的截面上纤维的伸长是主要的，

压缩似乎不明显，所以对中性层的位置一直没有取准，也就不会得到正确的结果。

历史上第一次认真讨论悬臂梁的中性层，即梁截面上没有应力作用的那一层的位置的学者是法国数学家帕朗(Parent Antoine，1666-1716)。因而他得到的悬臂梁的截面上的应力分布也比较正确。

帕朗的论证是从马略特的假定开始的，既然马略特认定悬臂梁在受载荷后，截面上的应力分布是根部下侧为零，整个截面上都是受线性分布的拉应力。从简单的平衡就可以得出推论，梁根部下侧所受的一定是压应力。由此他认定中性层一定是处于梁的中间某个位置。他经过与实验对照，确定对矩形截面梁，中性层与梁的上侧距离和梁高之比为 9:11 的地方。

梁的中性层最后准确定位是直到 1826 年法国力学家纳维(claude-Louis Navier，1785—1836)给出的。纳维 1826 出版的《力学在机械与结构方面的应用》〔6〕是系统讲述材料力学的第一本书，也是他在巴黎综合工业学校讲课的讲义。在这本书中，他第一次给出中性层准确定义。他的结论是：中性层通过截面的形心。

至此，关于悬臂梁的正确的应力分布问题才算是尘埃落定了。

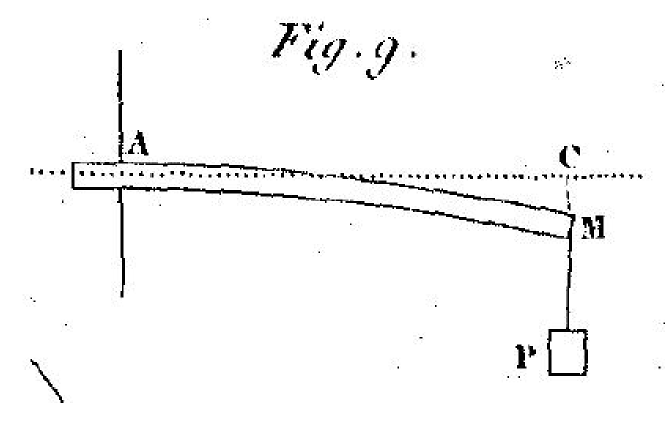


图 7　这是纳维讲义中的原始插图，

图示他对中性层的位置画的是正确的

纳维给出了正确的中性轴的位置，因而可以说他最后解决了梁的线性理论问题。又由于在其后的材料力学中，梁的理论占有突出的位置，所以可以说，现代的材料力学是从纳维在巴黎综合工业学校的教材《力学在机械与结构方面的应用》开始的。

在伯努利平截面的假设中，在梁的变形过程中，截面始终垂直于中性层，这不言而喻是忽略了在梁中的剪应力的，因而不能满足梁内局部的平衡条件。俄罗斯铁路工程师儒拉夫斯基（Журавский, Дмитрий Иванович., 1821-1891）于 1855 年〔6〕得到横力弯曲时的切应力公式。

在同一年，即 1855 年，在彼得堡出版了俄罗斯工程师别斯帕罗夫

（Беспалов П. ）的一本小册子《用初等方法求解关于材料力学与结构稳定性的问题》，书中最早介绍了弯矩图并开始使用弯矩图求解问题。

梁的力学模型一旦提清楚以后，人们便进一步处理更为复杂的问题。

后来，人们逐渐发现柱的受压和弯曲经常是不能分开处理的。1744年欧拉（Leonhard Euler,1707－1783）解决了压杆的屈曲和杆的弯曲大变形问题，拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736－1813)在1770年前后也深入讨论了这类问题的求解。基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff，1824～1887)则在1859年把柔韧的细杆在弯曲与扭转下的一般情况与刚体绕固定点的动力学问题对应了起来。

又由于梁的弯曲与扭转，在很多情况下也是耦合在一起的。对于横截面不是圆截面的情形的扭转问题也变得比较复杂，而且对于一般情形，外力作用也经常会同时引起扭转和侧向弯曲。关于梁的弯曲与扭转问题的一般提法和解决是法国力学家圣维南（(Saint-Venant,Adhemar Jean Claude Barre. de. 1797-1886)在1855年前后给出的。他给出了一般截面的柱体，受横向力时，不发生扭转的条件，给出了弯曲中心的概念。即横向力的合力通过弯曲中心时，柱体不会产生扭转。他还给出了计算截面上弯曲中心位置的方法。

§4 铁摩辛科梁

直到19世纪发展起来的已有的梁的理论，对于求解静力学问题，在工程实际问题中，精确程度是足够了。但是对于求解动力学问题却表现出明显的不合理。原来在伯努利梁的静力学方程上，简单地添加梁的惯性项，所形成的梁的动力学方程，用这种方程求解得到的冲击的传播速度可以是无限大的。这有点像线性热传导方程，是属于抛物型的。对于热传导问题，得到的熱传播速度的不合理还可以忍受。而对于梁的冲击传播速度是无限大，就会在实际工程问题中引起很大的误差。

为了克服这种不合理情况，曾在乌克兰基辅大学执教，1922年移居美国的铁摩辛科（Stepan (Stephen) Prokofyevich Timoshenko，1878－1972）提出了一种对伯努利梁的修正理论，并于1921年发表〔8〕。其中最重要的改进是考虑了梁内的剪切变形的一阶近似，从而放弃了平截面假定。另一项改进是在惯性项中加进了截面转动的惯性力。由于这一改进，梁的振动问题的方程就变成双曲型方程，相应的冲击传播速度也就是有界的了。目前铁摩辛科梁被广泛地应用于求解动力传播问题和控制问题中。

§5 小 结

如果从1638年伽利略的《关于两门新科学的对话》梁的问题的提出开始，到1921年铁摩辛科梁对于动力问题的完善，其间经过了漫长的近

400 年的时间。可见一个实际问题的完全解决，绝不是一朝一夕之功。需要许多学者的努力，还需要实践的不断检验和修正。

梁的问题虽然已经可以说能够告一段落了。不过人类的科学技术发展是无穷尽的。工程技术还会提出更精确的要求。例如梁的材料可以是压电材料、各向异性材料、不均匀材料、有时效的材料、组合材料等问题。又例如在失重下杆的行为的问题、有磁电感应力作用的问题。再例如由于更精确的需要，从三维弹性力学出发研究梁的问题，讨论不要任何变形假定的梁的理论。梁的问题还不断有人继续研究。可以说，梁的问题至今还是一个开放的问题，还会吸引许多的人投入。

作者感谢魏丰博士提供的若干原始文献，包括〔2〕和〔4〕的复印本。

参考文献

〔1〕 伽利略著，武际可译，关于两门新科学的对话，北京大学出版社，2006

〔2〕 I.Todhunter，*A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, from Galilei to the Present*，Dover Publications，1886

〔3〕 E.Mariotte，*Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*，Oeuvres de Mr.Mariotte Tom.II，1886

〔4〕 R.Hooke， *Lectures (de Potentia Restitutiva)* （*Lectures of springs*），1678

〔5〕 亚・沃尔夫，十六、十七世纪科学、技术和哲学史，商务印书馆，1991

〔6〕 M.Navier ， L’application de la mechanique a l’établissement des constructions et des machines，1826

〔7〕 Журавский, Дмитрий Иванович ， О мостах раскосной системы Гау. СПб, 1855

〔8〕 S. P. Timoshenko , On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Phil. Mag.*, **XLI**, 744-746, 1921. Reprinted in *The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko* , McGraw Hill, London, 1953. See also [18], pp. 329–331.

最早刊登于力学与实践 2008 30 (6): 第 106-109 页

4 说　板

在固体力学中，也许弹性梁的研究是最早的。梁的研究的起因和航海、建筑等工程应用是分不开的。板的工程应用比较晚，最早激起研究板的理论的热情，却不是由于工程应用的要求，而是人们的好奇心所激发的。

最早讨论弹性板的变形问题的人可能是詹姆斯・伯努利（James Bernoulli，1654-1705）在 1788 年向彼得堡科学院提交的论文《矩形弹性板的自由振动》（Essai théorétique sur les vibrations des plaques élastiques rectangulares et libres），该文于 1789 年发表。詹姆斯・伯努利是以研究概率论出名的，他是丹尼尔・伯努利的侄子。由于他得到的板的振动方程是

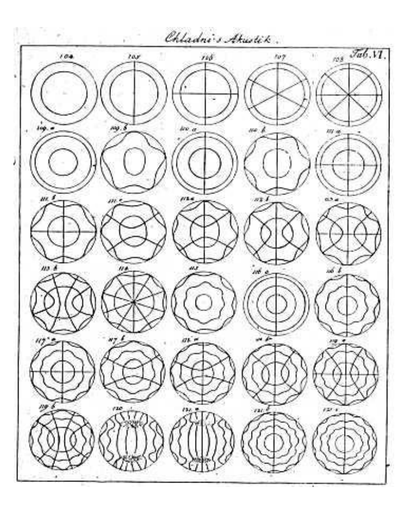


图 1　克拉尼像

$$(\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{d^4z}{dy^4})=\mathrm{c}^4\frac{d^2z}{dt^2}$$

他把板看作两个方向弯曲的梁，所以方程是不正确的，因此对后来的研究影响很小。

据记载，早在 1680 年 7 月 8 日英国物理学家胡克（Robert Hooke，1635-1703）就曾经做过一个实验，用小提琴的弓子拉一块玻璃板的边缘，如果在玻璃板上铺一层细沙粒，结果就会看到细沙粒往某些线上集中，形成不同的花纹。到 18 世纪一位德国律师、业余物理学家和业余音乐爱好者，克拉尼（Ernst Chladni ，1756-1827)， 重复胡克的实验，并且详细描述了这个实验，记下了对不同支撑条件、不同摩擦部位不同形状的板的实验所得到的花纹。这些花纹显示的就是在沙粒集中的地方，板的振幅为零，即所谓的节线。克拉尼把得到的结果写成一本书，*Entdeckungen über die Theorie des Klanges*（声学理论中的新发现，



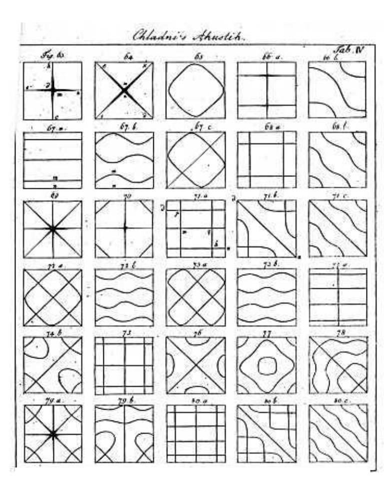


图 2 圆板与方板的克拉尼花纹

1787 年出版）。其后，克拉尼还计算和测量过声音在不同气体中传播的速度，由于这些研究，克拉尼被誉为“声学之父”。 1802 年，克拉尼将他有关声学的研究成果汇编成《声学》一书出版。

1808 年到 1810 年之间克拉尼访问巴黎，他的关于板的振动的讲演和演示引起巴黎科学界的注意。他的《声学》在此期间于 1809 年被翻译为法文。著名的科学家拉普拉斯等一批学者观看了他的演示，一时谁也不能够做出比较合理的解释。拿破仑也观看了他的演示，并且说：“克拉尼使声音变得可以看得见了”。为了解开克拉尼花纹的秘密，巴黎科学院设立了一项悬赏奖金，要给予能够在数学上对于弹性板的克拉尼节线与实验符合的解释的研究者，奖金额度为 3000 法郎，为当时一千克金子的价值，时限为两年。这大概就是现代关于弹性薄板理论研究的开始。 唯一响应这项悬赏的，是一位带传奇色彩的女科学家热尔曼（Sophie Germain,1776 - 1831)，一位不向命运屈服的妇女。当



图 3　热尔曼像

她 13 岁的时候便阅读各种书籍，她天天泡在图书馆里，阅读数学力学等外文书籍。强烈的求知欲与她所处的歧视妇女的社会产生了矛盾。妇女无权上大学，使她进不了她渴望进入的巴黎工科大学。

她没有屈服于命运，她借阅大学生们的笔记，冒用一名男生的名字勒伯兰(Leblanc)去交读书报告。她读正在那里执教的大数学力学家拉格朗日(Lagrange)的名著《分析力学》后，将读书报告交给他，拉格朗日十分欣赏她的才能，最后当拉格朗日发现她是一位妇女后，非常爱护与支持她。

热尔曼后来在数论和弹性力学方面做出了开创性的工作，受到人们的尊敬。德国著名数学家高斯说她：“ 按照我们的传统和偏见，作为女性的她做这些困难的研究必然会比男人遇到无限多的磨难，而她竟克服了这些困难并能穿透其最不清楚的部分取得成功，她无可怀疑地具有最高尚的勇气、十分异乎寻常的才能和超常的天才。”

1811 年热尔曼以匿名向巴黎科学院投递了她响应悬赏的论文，由于她没有受过正规的教育，而且是初次接触到这个问题，所以她没有得到奖赏。这项奖金因为没有人获得而延后。

两年以后，1813 年 10 月 1 日，她再次投递了响应悬赏的论文，这篇论文曾经受到过拉格朗日的帮助，作为评委的拉格朗日指出过文中推导的错误。这一次她虽然没有得到奖赏，但由于论文的高水平，得到评委

们的赞赏。最后，由于她坚持不懈的努力，于 1815 年投出了关于薄板振动的论文，终于在 1816 年获得了科学院的奖励。令公众失望的是她并没有出席授奖仪式，原因可能是她感觉到公众没有对她应有的尊重。

热尔曼遇到的困难，不仅是她不熟悉变分法，变分法是不久之后才由欧拉与拉格朗日发展的，而且当时弹性力学的一般理论也还没有建立，唯一可以参考的是欧拉关于梁的工作。她的天才的表现是她引进了板的弯曲的平均曲率的概念，并认为板的变形能密度是平均曲率的函数。即

$$\mathrm{V}((1/r)+(1/r'))=\frac{\mathrm{c}}{2}((1/r)+(1/r'))^2$$

其中括弧内的两项是平均曲率。但是由于她的变分法运用得不正确，所以得到的方程为

$$\frac{d^2z}{dt^2}+gEbc(\frac{d^6z}{dx^4dy^2}+\frac{d^6z}{dx^2dy^4})=0$$

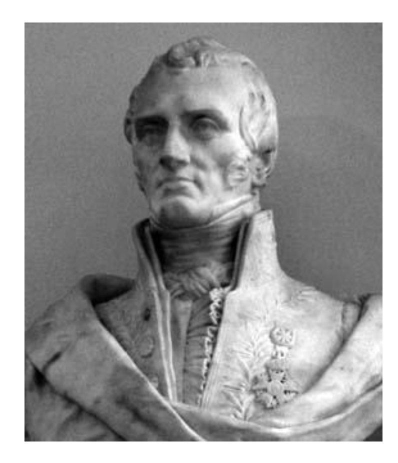


图 4 纳维像

后来由于拉格朗日的指正，她才得到正确的方程。拉格朗日指明的方程是

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k^2(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4})$$

热尔曼在得到奖励后，并没有停止对板的振动问题的研究。后来还发表了若干篇关于板的振动问题的论文。特别是在 1821、1828 年提交的论文，由于还含有缺陷而没有被重视。

也许有人会问，既然热尔曼得到的方程中，连前面的刚度系数 k 平方也没有给定。更没有关于薄板问题边界条件讨论，为什么法国科学院还会授予她奖赏呢？问题很简单，法国科学院悬赏的问题是要解释板振动时的节线，节线处的挠度是零，求解节线和刚度系数没有关系。在板作自由振动时，边界条件也是容易满足的，无需专门讨论。因此她得到奖金是很自然的。1823 年法国学者纳维（Claude-Louis Navier，1785-1836）发表了论文《弹性板挠曲研究摘要》（Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques）。论文得到了弹性板的方程，随后用重三角级数求解了矩形板在自重和集中力作用下的挠度。这个解被后人称为板问题的纳维解。



图 5　泊松像

提到板的问题，应当提到泊松（Simon Dinis Poisson，1781-1840）的工作。他在1814年发表的论文“弹性薄板”(Mémoires sur les surfaces élstiques）。泊松在这篇文章中首先正确地提出受均匀张力的薄膜的平衡方程，随后，他以不同的方式得到了弹性薄板的平衡与运动方程。随后他在1816年又得到了板的弯曲方程。他的推导与热尔曼不同在于利用板弯曲时板曲面面积的变分为零来得到的。在1829年，泊松发表了他的重要著作《论弹性体的运动与平衡》（Mémoire sur l’équilibre et le movement des corp élastiques）。文中除了讨论弹性体的一般平衡与运动方程外，还最早引进了现今称为泊松比的系数。文章最后讨论了板方程的边界条件，不过从现在的观点看，他提的边界条件是不正确的，比正确提法的要求要多。

泊松关于板的研究中的错误，虽然有一些学者指出过，不过在德国物理学家基尔霍夫（G.R.Kirchhoff,1824-1887）之前一直没有彻底解决问题。1850年，在柏林大学执教的基尔霍夫发表了他关于板的重要论文《弹性圆板的平衡与运动》（Ueber das Gleichgewicht und die elastischen Scheibe：Credles Journal，Bd.40,S.51-88）。

基尔霍夫的论文指出泊松的错误。论文从三维弹性力学的变分开始，引进了关于板的变形的假设，这就是：

1.任一垂直于板面的直线，在变形后仍保持垂直与变形后的板面。

2.板的中面，在变形过程中没有伸长变形。

这个假设后来被逐步改进，形成现今的直法线假设。在论文中基尔霍夫给出了板的边界条件的正确提法，并且给出了圆板的自由振动解，同时比较完整地给出了振动的节线表达式，从而较好地回答了克拉尼问题。至此弹性板的理论问题才算是告一段落。



图 6 乐甫像

1888 年,英国力学家乐甫（Augustus Edward Hough Love，1863-1940）推广了基尔霍夫关于板的直法线假设,把它应用于薄壳理论中，之后系统发展了弹性薄壳理论。后来直法线假设也被称为基尔霍夫一乐甫假设。

进入二十世纪后，随着铁摩辛科梁的研究，也开始了厚板的研究，提出了不同类型的厚板方程和边界条件。

参考文献

1. *Entdeckungen über die Theorie des Klanges, 1787*
2. Louis L. Bucciarelli and Nancy Dworsky, Sophie Germain, D.Reidel Publishing Compony, 1980
3. Todhunter, A history of the Theory of Elasticity and of the Strength of material, Vol.1, Vol.2, Cambridge University Press, 1893

2009-2-2

5 谈 薄 壳

在人们的心目中，鸡蛋壳是很不结实的。形容以弱对强，说是“以卵击石”，俗话里说“鸡蛋碰碌碡”；形容比较危险的情况，说是“危如垒卵”。

其实，这么说也对也不对。人们的印象是从鸡蛋经不起磕碰得来的，要打破鸡蛋，只要把鸡蛋往碗边上轻轻一磕，鸡蛋壳便会破裂。不过，要是均匀地对鸡蛋施加压力，鸡蛋壳还是很结实的哩！

图 1 所示，是一个小伙子，不仅能够在鸡蛋上行走，并要拖着一辆汽车前进。鸡蛋还要保持完整无损。

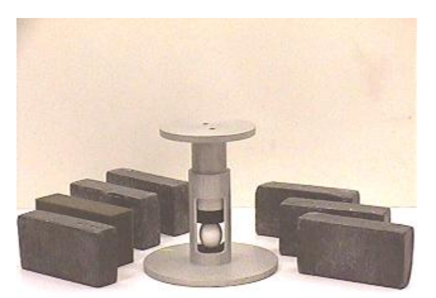


图 1 在鸡蛋上行走的小伙子

据报道，1989 年，日本爱知县的春日井市先生，在汽车前轮各用 34 个鸡蛋，后轮各用 52 个鸡蛋，总共只用 172 个鸡蛋支承起了一辆汽车。 这里汽车的重量接近一吨重。

有人故弄玄虚地说，能够站在鸡蛋上是因为练了轻功。体重减轻了，所以连最不结实的鸡蛋都能够把他支承起来。难道汽车也会轻功吗。

对于鸡蛋的强度，国际上要求蛋在竖放时能承受 2.65×105～3.5×105Pa(2.7～3.6kg/c ㎡)压力，据测定，鸡蛋在 2.94×105Pa(3.0 个大气压)下不破裂。这只是所要求强度的平均水平。为了选择更高强度的鸡蛋，我们来做一个鸡蛋的强度实验，如图 2，取两块泡沫塑料垫在鸡蛋的上下。在圆柱台上放每块 10kg 的铅块，实验表明，一般鸡蛋，至少在三块铅块下不破碎，即能够承受 30kg 的重量，强度比较大的鸡蛋一个鸡蛋能够承重有六块铅块，一共有 60kg 之多。这表明，只要有两只鸡蛋，就可以支承百公斤体重的大汉了。这个实验容易说明，鸡蛋的强度足可以把一个人的重力支承住。而实际上具有平均强度水平的鸡蛋，只要用四个就能够充裕地满足大多表演“轻功”的人站立在鸡蛋上的要求。



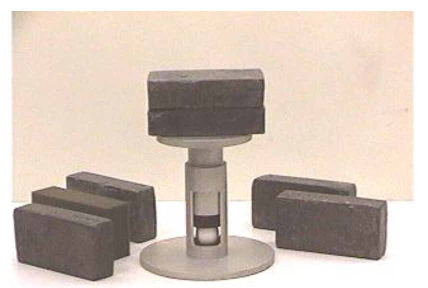


图 2 对鸡蛋进行强度实验的装置

鸡蛋壳承重的窍门在于，一是要静态加载，不要动态加载。二是要

加载比较均匀，不能使用尖锐的物件加压和局部压强很大。其实，对于任何由脆性材料组成的结构，也都是在这样的条件下承重很大。日常用的玻璃杯和瓷碗，都是这样。

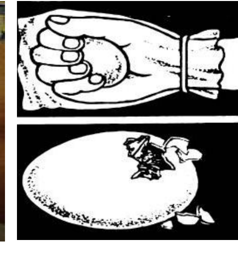




图 3 两种捏鸡蛋的方式

试观察图 3 所示的两种捏鸡蛋的方式。满把握鸡蛋，鸡蛋各个方向比较均匀受力。很不容易捏碎。用拇指抠鸡蛋，这时鸡蛋受一个集中力。很易于破碎。在鸡蛋内的小鸡虽小，它在蛋内用一个又尖又硬的嘴，很容易顶碎蛋壳，破壳而出。站在鸡蛋上的表演者，就是要尽量使鸡蛋受力均匀，而又没有冲击，鸡蛋才能够支承。而要做到这一点需要适当的练习，并不是什么“轻功”。

鸡蛋能够承受的重两超乎我们平常的直觉，这就是在结构设计和建设中广泛采用薄壳结构的道理。用薄壳结构，不仅耐用，还节约材料。

现在让我们考查一个例子。我们设想在平面上有 2R 宽的一个口子，上面是压强为 p 的静水压力。用两种方案来堵住这个口子。一种是用半圆拱，一种是用直梁。设材料都相同，哪一种更省料。如图 4 所示。

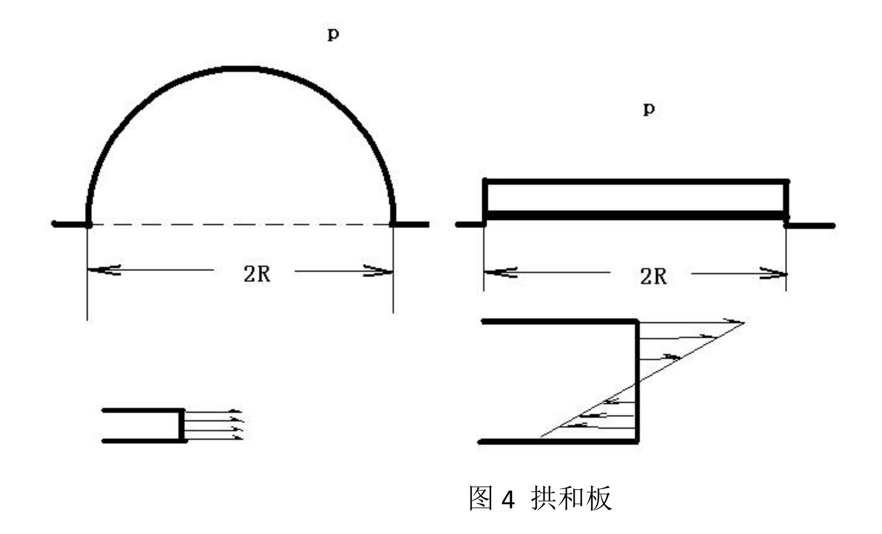


图 4 拱和板

我们经过计算

用半圆拱用料体积为 $V_1 = \frac{\pi R^2}{\sigma}$

用直梁的用料为 $V_2 = 2R^2\sqrt{\frac{3p}{\sigma}}$

两种方案用料之比为 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{p}}$

其中σ为材料的许用应力。通常σ总是比 p 大许多倍，有时可以大数千倍。所以尽管用半圆拱比直梁要长，而用料却要节省许多倍。这就

是工程中在可能的条件下多用拱而少用直梁的原因。如图 4 下半部分所示，半圆拱截面上的应力是均匀分布的，而用直梁，截面上的应力是上下表面大中间为零。中间部分的材料被“浪费”了。如果 σ 比 p 大 100 倍，则用半圆拱用料要节省 10 多倍。计算表明即使用半球壳和圆板堵同一圆洞，结果也大致相同。这个例子说明鸡蛋壳的构造是非常节约材料的。拱只是在一个方向弯曲，而薄壳是在两个方向弯曲。薄壳比拱还要节约材料。

所以在工程中薄壳用得十分普遍。

自然界的生物经过亿万年的进化逐渐淘汰掉那些浪费材料的结构。而保留下来的结构大多是比较合理和节约的。植物的茎是中空的，植物的种子有外壳来保护，鸟类的卵，低等动物（乌龟、蜗牛，贝类）的外壳，高等动物的骨骼、头盖等等，都是薄壳结构。

在工程技术中，薄膜结构、各种容器、管路，都是薄壳结构。通常飞机、火箭、潜水艇、轮船、大型屋盖、水塔、冷却塔、拱坝等的结构，大都采用薄壳结构。

要全部罗列在自然界与工程技术中的薄壳结构，是很困难的事，下面三张图，只是举一些主要的项目。就已经可以看出薄壳结构的普遍性了。



图 5 各种植物的果壳



图 6 各种容器














图 7 各种复杂工程结构

在图 7 上，我们依次列举了：麻省理工学院的大礼堂、储油罐、陕西褒河拱坝、油轮、长城号火箭、水塔、冷却塔、潜水艇和波音 737 飞机。它们的主体都是大型薄壳结构。

说到薄壳结构的历史，是一个漫长的过程。我们前面讲了一大段鸡蛋壳，只是说，对于理解薄壳结构的优点鸡蛋壳有启发性，至于人们从使用到大量在工程技术中的应用薄壳结构，那可不是这样简单的事。不经过认真的理论研究和论证，人们不会贸然把薄壳用到重要的结构上去

的。它是经过很长的历史进行理论研究和实践探索的结果。它是人类对整个结构工程研究的必然结果。

人类对结构的精确研究，是大约从 15 世纪对梁的研究开始的，其后才逐步研究拱和板。到了 19 世纪，形成了一门称为弹性力学的学科。是对弹性物体在外力作用下的变形和内力进行分析的学科。薄壳是最为复杂的结构元件，所以薄壳理论成熟得也相对晚。

弹性薄壳的理论是乐甫在基尔霍夫关于板的理论的基础上在 19 世纪末发展起来的。20 世纪 20 年代，在德国首先把圆柱壳用于屋顶结构。后来出现了球面、马鞍面等多种曲面的壳结构和折板结构。在大型冷却塔使用薄壳结构大约起于 1913 年左右。薄壳理论大约在 20 世纪 40 年代趋于成熟，在那以后薄壳被广泛应用于建筑。用于船舶、航空结构则还要早。

就现今的了解，薄壳理论主要研究的内容是：在给定外力、材料、几何形状下分析结构的应力与变形、评估强度、给定材料和外力，寻求最优的薄壳几何形状、由于薄壳结构越来越薄，稳定性分析变得很重要、薄壳的大变形分析也受到更多的关注。由于薄壳结构的复杂性，在今天这些分析，几乎都要借助于计算机来进行。

说到对薄壳理论研究的贡献，我国有两位力学家的工作是值得一提的。

钱伟长（1912-2010）早期最重要的工作是在１９４１年。钱伟长和他的导师辛格合作发表的《弹性板壳内禀理论》一文，作者成功地用张量符号建立了薄板薄壳内力素张量所应满足的6个静力平衡方程，并把微元体的平衡及变形协调方程写成适当的形式，避免了对板壳变形的先验假设。从这一精确理论出发，可以根据不同的实际情况做不同的近似处理，发展出系统的理论方法。



图8 钱伟长像

薄壳由于节约材料的优点，于是，从强度的角度来考虑，薄壳可以做得很薄。不过当薄到一定程度后，另一类问题就变得尖锐起来。这就是结构会失去稳定性而突然塌陷。1939年前后美国力学家冯·卡门（von Karman，1881-1963）和他的中国学生钱学森（1911-2009）。首先从非线性的观点来研究薄壳（球壳与柱壳）稳定性。并且得到了薄壳失稳的上下临界的概念，成功解释了此前许多难于解释的实验发现的现象。



图9 钱学森像

总之，从观察鸡蛋壳的承载能力。我们

可以理解薄壳结构的优越性。不过要深入了解薄壳结构，还需要学习的东西很多。弹性理论、弹性系统的稳定性、薄壳结构的计算力学、薄壳的非线性理论等等。

2010-6-13

6 构件的连接（一）
——榫卯连接与斗栱

一位巧裁缝，能够把剪裁好的布片连缀成端庄或华丽的服装。结构工程师能够把构件连接成宏伟的大厦与各种特别用处的结构。裁缝用的是针和线。结构工程师们用的是什么手段呢？人们用的手段因材料而异。

§1 榫卯连接

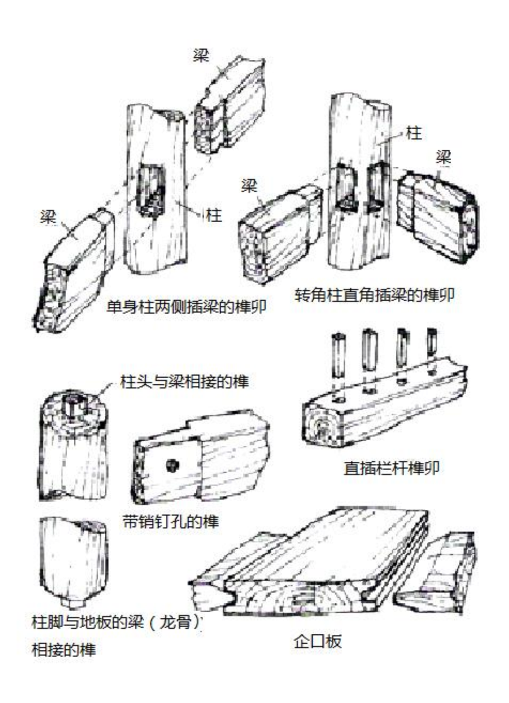


图 1 浙江余姚河姆渡文化出土的榫卯连接类型

我们首先来介绍一下对于木质构件的连接。最常用的就是榫卯连接。榫卯这个词，榫表示构件突出的部分，卯表示凹进的部分，榫部紧密地进入卯相互连接，就称为榫卯连接。由于木结构有数千年的发展历史，所以榫卯连接的历史也非常久远，而连接的形式和花样层出不穷，已经成为一门特殊的学问了。



图 2 河姆渡文化榫卯连接的实物

图 1 是 1973 年发现的浙江余姚河姆渡文化出土的榫卯结构连接的类型，图 2 是榫卯连接的部分实物，河姆渡文化距今已有 5000 至 7000 年的历史。可见木构件的榫卯连接在我国的历史悠久。在这样长的历史发展中，榫卯结构产生了适应不同需求繁多的类型。下面我们就来简单归类介绍一下。

对于要把两根杆对接起来的榫卯如图 3，这种情形，对接的两部分需要稍长的对接长度，这样比较能够耐受弯曲，另外其中关键是有一枚楔

钉插入卯孔，连接在一起的两根杆就不会在拉力作用下拉脱。

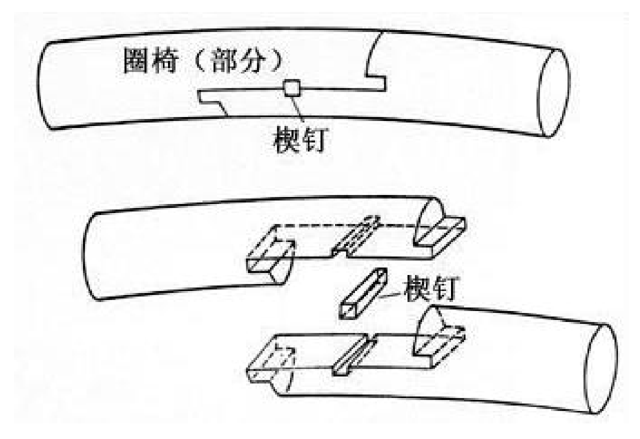


图 3　两根杆对接的榫卯结构

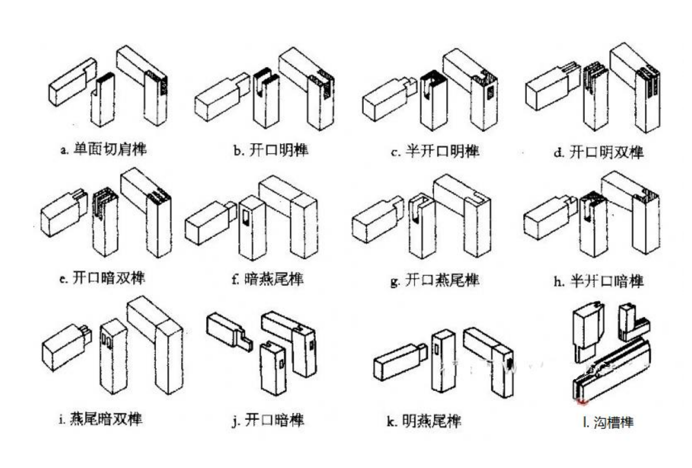


图 4 两根杆成直角连接时的榫卯结构

对于两根干成直角的连接，如图 4。适应于不同情况，图上列出了 12 种不同的连接办法。有明榫，有暗榫，还有半明暗的榫；有单榫有双榫等等。值得指出的是，两根杆成直角的连接，并不一定要在杆的端头，可以发生在一根杆的中间，或者两根杆在中间相互交叉成直角或任何角度，这时就要把上述的各种榫卯技术灵活应用，或改型构思新的榫卯形式。

三根柱体相互垂直交接在一起，这无论在家具还是在房屋建筑中都是经常遇到的。实施方案有很多种。图 5 是一种称为粽角榫的连接。它使三根柱体牢固连接三面都很平滑，经常在明式家具中看到，图上的这个粽角榫是用的透榫，如果用暗榫（或称闷榫）则在三面只看到三条呈 45°的线，一切都很平滑。显得很干净。图 6 是三根圆柱连接的情形，这种榫要求结合起来后，只看到圆柱之间的相交线。这类榫制作起来需要有较高的精度。

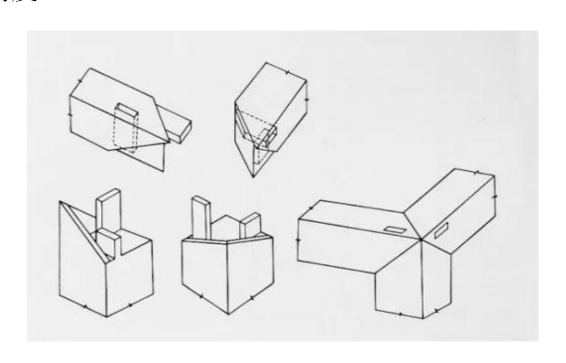


图 5 粽角榫

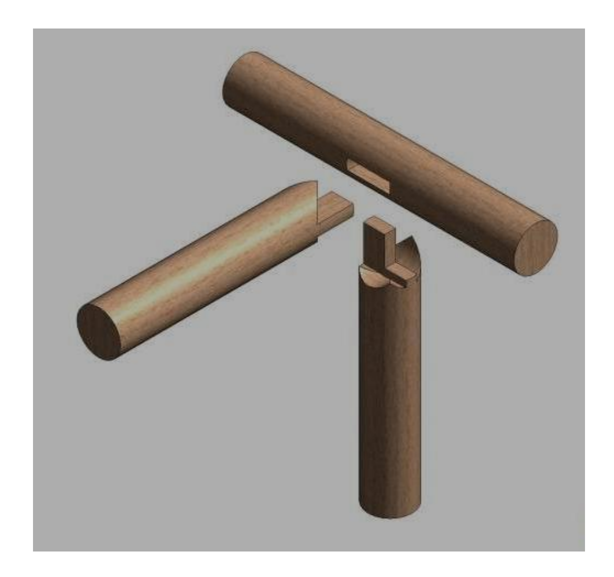


图 6 三根圆柱相交的情形

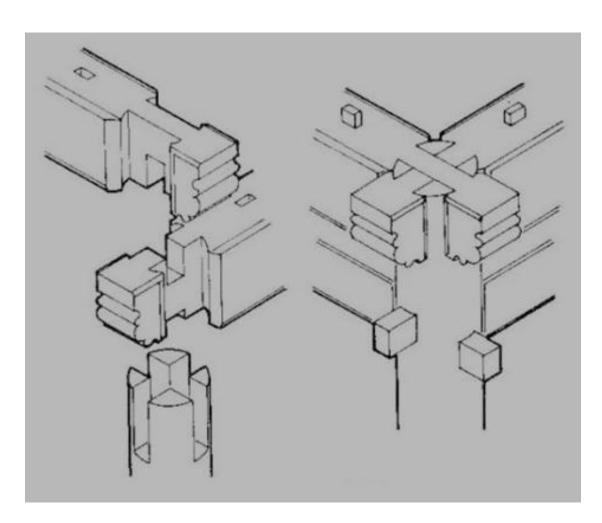


图 7 梁柱的交接

图 7 是梁柱交接的榫连接，在两根梁交叉的地方需要相互减弱一半，

相互搭接后再置于开十字槽的柱头。由于梁的交接处减弱了所以在梁的下边柱上增加两片枋（如图右），以改善梁端的强度。图 8 的左边也是两根梁交接在柱头上，不过它让一根梁通过一个柱头上的榫直接搁置在柱头上，另一根梁搭接在第一根梁之上。图的右边是仿照图 5 的粽角榫将三根垂直相交的杆交汇在一起，不过却简单多了，这种榫接不能牢固地汇合，需要胶粘或螺钉仰或是楔钉加以固定。

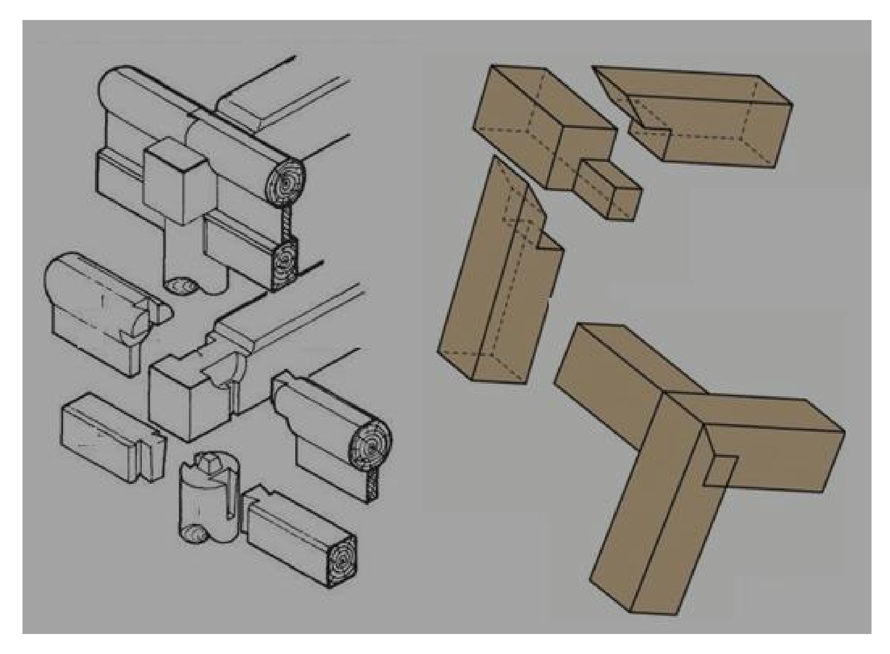


图 8 两根梁与柱的交接

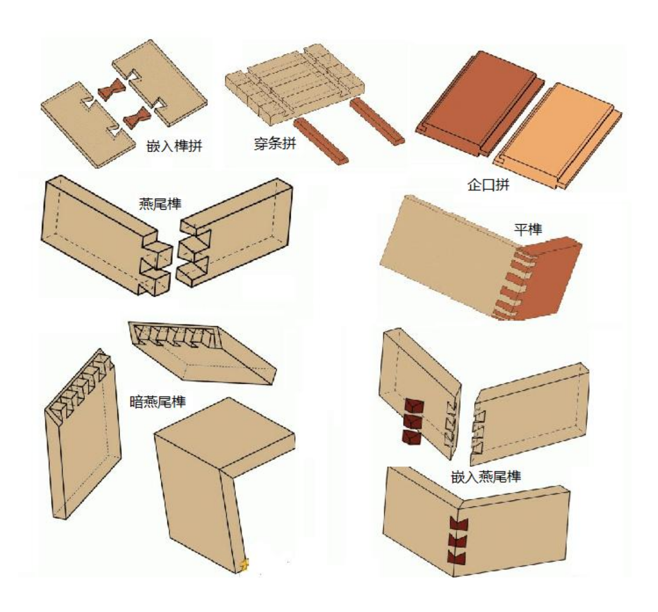


图 9 板的榫连接

图 9 是关于板的榫卯连接，上面的三个是板面的拼接。通常的木地板都采用的是企口接。一般两块板成直角的连接，大多用燕尾榫连接。

我们上面大致介绍了木构件之间的榫连接，值得注意的是，在古代的石材建筑中也大量地应用榫卯连接。一般石栏杆、石牌坊、石桥等结构就经常使用榫卯连接。图 10 是一个石材用榫卯连接的例子。图 11、12、13 则是三座著名的石材建筑，都是用榫卯连接在一起的。



图 10 石材的榫卯连接

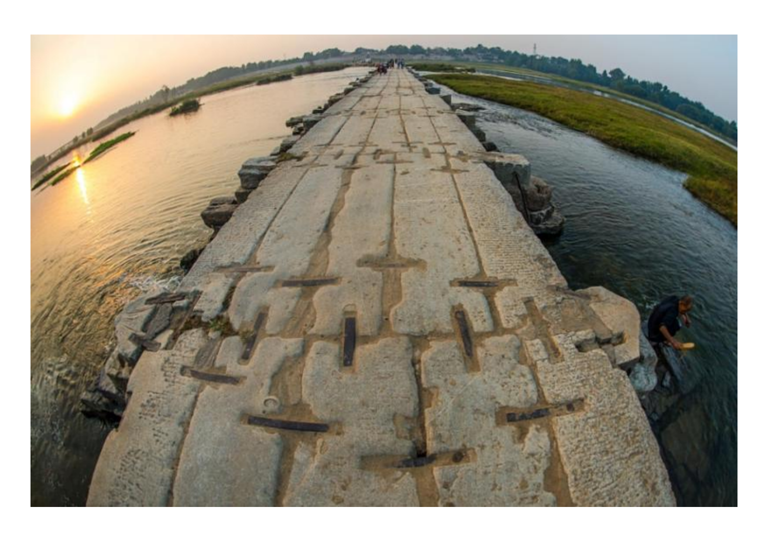


图 11 山东大汶口明石桥北起泰安市岱岳区大汶口镇南门，南至宁阳县磁窑镇茶棚村。明朝隆庆年间(公元 1567-1572 年)修建，故名“明石桥”。



图 12 珠海十景梅溪牌坊，採用榫鉚方式構造，有瑞獸、花果、人物、書法和八仙圖案，雕刻精美。



图 13 巴尔贝克神庙位于贝鲁特东北 85 公里，建于公元 60 年前后是世界驰名的古迹。

§2 斗拱连接

中国古建筑中，在世界上一种特有的构件之间的连接方式，就是斗栱。它也可以说是榫卯连接在建筑上的一种特别的表现。

中国古代建筑是以木材为主要构件的建筑体系，梁和柱承重，门窗和墙壁只是作为围护，并不承重。这种承重的结构，下边是立柱，上面是梁桁，在立柱与梁桁之间有一种全面应用榫卯连接技术的构件，就是斗拱。由于有斗栱，能够使出檐向外远伸，也使梁柱的受力更加合理。所谓斗栱是由直接支承在柱顶或栱上的四方形的“斗”与在斗之上向上成为弓形的“栱”合成。（图 17）所以合称为斗栱。



图 14 四川都江堰市出土



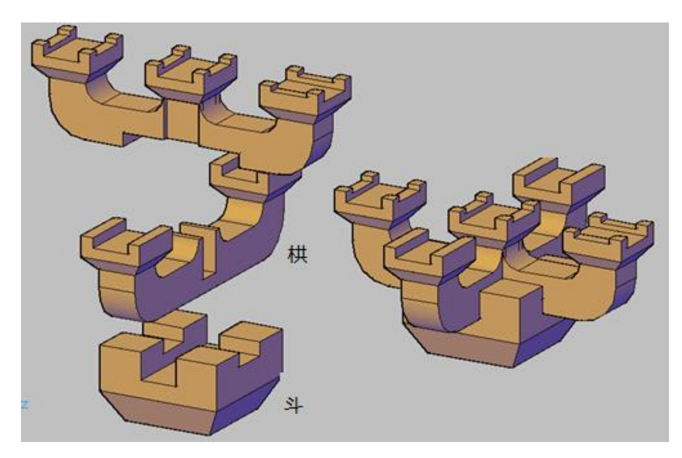
图 15 东汉山东苍山县前村出土



图 16 山东汉画像石图中已经明显看到有斗栱的构件

斗栱结构在中国有很久远的历史。大约在商周时期，中国的建筑结构中就已经有斗栱的雏形了。从青铜器的图文中已有反映，后来在战国时代的出土文物上也有斗栱的形象。在汉代的画像石上已经有大量的斗拱图像（图 14、15、17）。开始，最早的斗栱是柱支承一根梁时候，将

支撑力分为两个或三个，后来斗栱变得愈来愈复杂，一个柱头可以支承多根梁或枋。现存最早的斗拱建筑实物，应当是山西五台山佛光寺大殿（图 18）。到了宋代，在李诫著的《营造法式》中已经详细介绍斗栱的制作与用材。明清以后，则甚至规定一些重要建筑一定要用斗栱。



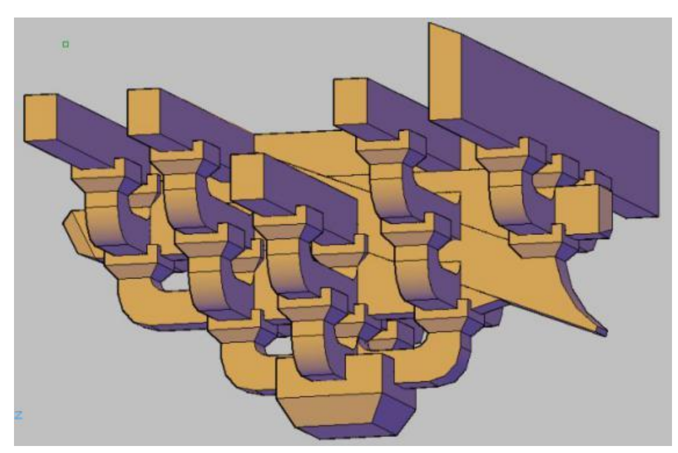


图 17　斗栱连接示意图



图 18 五台山佛光寺大殿的斗拱

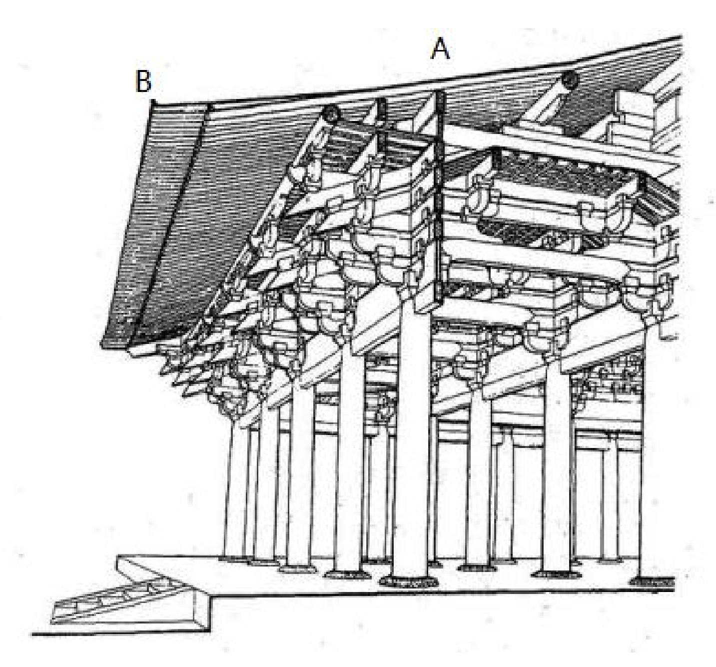


图 19 斗栱连接示意图

为了说明斗栱对梁的受力所起的作用，我先来看图 20，在马的挽具后面挽绳系在一根系杆上，它是一根等臂杠杆，就是说无论马怎样走，马两边的挽绳受力都是一样的。右边是系杆放大的情形。如果我们有两匹马来拉一辆车，那么按照图 21 挽绳的系杆安排，则两匹马在任何情况下，挽力的分担也是均匀的。如果有四匹马或八匹马来拉车呢，只要多一两层系杆，就能够使各匹马分担相同的挽力。

上面说的系杆分配的挽绳的拉力，而斗栱是要把柱头的支撑力比较均匀地分配到梁上。所分配的是压力。我们再来看图 22，那是一个汽车上的雨刷，它是受挽绳系杆启发的发明，它要使雨刷板 B 任何时候任何点都密切地和汽车玻璃接触，为此它设置了三层栱，每一层都是一根等臂杠杆而且具有相当好的弹性，第一层一个栱、第二层两个栱、第三层四个栱，这和我们分配马拉车的系杆是一样的。所不同的是现在是压力。经过这样分配后，摇杆通过 A 钩与雨刷的 A 孔相连给雨刷一个压力并带动雨刷在汽车玻璃上来回摇动，尽管汽车窗玻璃是不平的，而且每时每刻雨刷板所接触的玻璃的曲线都在变化，由于雨刷板所受的压力都很均匀，而且雨刷板又有一定的弹性，所以雨刷板就总是与窗玻璃贴合的，把雨滴扫得干干净净。

到这里，你该看明白了，斗栱从力学上来说至少有两重作用：

第一，斗栱的作用就是和汽车的雨刷上的“斗栱”是一样的，它也

有一定的弹性。它的作用是把柱头上的集中力，分为若干个等效的相互有一定距离的集中力作用到被支承的梁上。有一点差别，雨刷与挽绳系杆的支点都近似是一个点，而斗栱之间的接触是一小块面积，正由于此，各级杠杆看作是等臂的只是一个大体的近似，另外有的栱还有中间支点，所以经过它分配的几个力虽然不能看作完全均分的，但总可以看作是以一定的比例分配的。

我们知道，集中力对梁引起的弯矩，比起同样大小的分布的若干力要大，所以斗栱使得梁的受力更为合理，它减小了梁的局部应力。

第二，斗栱还在一定程度上，减少了立柱的数目。斗栱和雨刷毕竟不同，雨刷是平面的，而斗栱是立体的，雨刷只是把摇杆的压力均匀分配到刷板的各点，而斗栱不仅把柱头的支撑力以一定的比例分配到一根梁的各点，还要把这个支撑力以一定的比例分配到纵横交错的多根梁或枋上。斗栱不仅能够把作用在一根梁上的支撑力分散，而且能够使一根立柱支承若干根梁。从而大大减少了立柱的数目，这就不仅能够使建筑的跨度增大，而且能够控制经过一根柱头上的各根梁的支撑力的合理分配，使得整个结构的受力分配更加合理。由于斗拱能够使立柱的减少，所以构件能够使建筑物的出檐外伸得很远。如图 19，房子的最外一排立柱是在 A 的地方，有了斗栱结构，依靠它支承了几根纵向的梁，尽量使椽的悬臂部分减短，这就能够使出檐延伸到 B 而不需要增加新的立柱。

因此斗栱的发明，而且发明得那样早，是很了不起的。



图 20 挽具后面的系杆

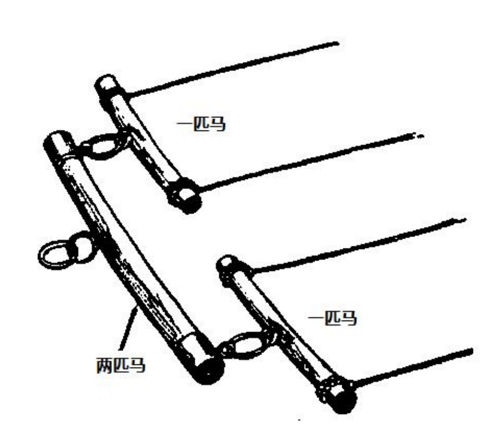


图 21 两匹马的系杆

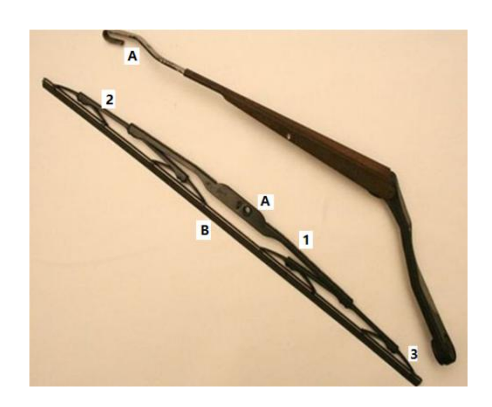


图 22 汽车上的雨刷

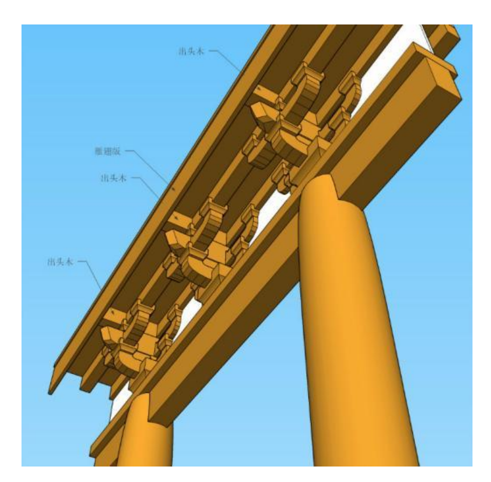


图 23 斗拱连接图

参考文献

[1] 潘德华，斗栱，东南大学出版社，2011

[2] 郭希孟，榫卯之美——明清家具鉴赏，中国林业出版社，2014

2016，8，21

7 构件的连接（二）——金属构件的连接

对于金属构件的连接就不能用木材或石材那样通过榫卯来连接了。固然也有少量的连接是从榫卯连接那里移用过来的，例如图 1 所示的键连接，它是把左下的一根轴和右上的齿轮连接在一起，以便轴和齿轮同步旋转，我们看到轴上有一个键槽，齿轮的内孔上也有一个键槽，在轴上方的那个键就插在这两个键槽之间使轴和齿轮牢固地连接在一起。键的作用有点像我们介绍过的榫卯连接中的楔钉的作用。在机械领域固然键连接用得也很普遍，不过我们认为，它并不是由于金属构件独特的特点发展起来的连接方式。

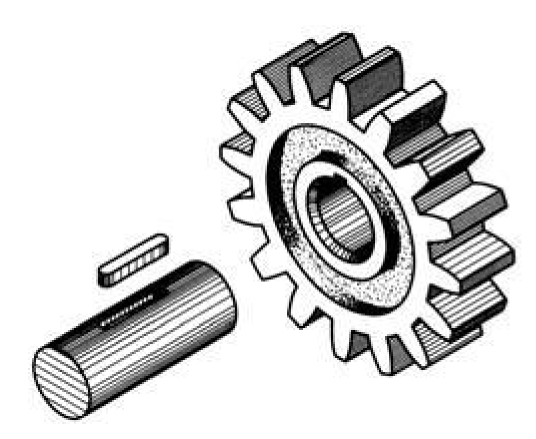


图 1 键连接

针对金属构件发展起来的独特的连接方式有哪些呢？，我们下面要主要介绍的是：焊接、铆接、螺栓连接和粘接四种。

§1 焊接

焊接是把两个金属构件要连接的地方用高温使其熔化后粘接在一起，一般是用一种比构件熔点低的金属焊条加温熔化后把两个构件粘接在一起。焊接的办法也用在两种塑料构件的连接上。它的实质是使构件的原子和分子之间产生结合，所使用的方法是加热或加压，或同时加热又加压。

焊接办法产生得很早，我们平常说“好钢用在刀刃上”就是把好钢的刀刃与熟铁的刀背通过锻造焊接在一起的，这种办法在战国时代就已经有了。与此同时还有铸焊、铆焊、钎焊，但加热的方法，都是火炉，加热的范围太大、不集中、温度又低，所以几千年进步不大。只有到了十九世纪末、二十世纪，随着近代科技的发展才有大的改变。先后出现了燃烧乙炔加热的气焊、用电弧加热的电弧焊、薄药皮的焊条电弧焊、等离子弧焊、激光焊、超声波焊、摩擦焊、爆炸焊等新技术，由于焊点的高温，金属容易氧化，而氧化层又严重地影响焊接质量，针对这个问题出现了熔化极惰性气体保护焊、二氧化碳气体保护焊等革新。

目下，焊接的方法很多，一般都根据热源的性质、形成接头的状态

及是否采用加压来分类，一般可归结为以下三类，不同的焊接对象与接头特点需要选用最适宜的焊接方法连接。

1、熔化焊 熔化焊是将焊件接头加热至熔化状态，不加压力完成焊接的方法。它包括气焊、电弧焊、电渣焊、激光焊、电子束焊、等离子弧焊、堆焊和铝热焊等。

2、压焊 压焊是通过对焊件施加压力（加热或不加热）来完成焊接的方法。它包括爆炸焊、冷压焊、摩擦焊、扩散焊、超声波焊、高频焊和电阻焊等。



图 2 船舶外壳的焊接

3、钎焊 钎焊是采用比母材熔点低的金属材料作钎料，在加热温度高于钎料低于母材熔点的情况下，利用液态钎料润湿母材，填充接头间隙，并与母材相互扩散实现连接焊件的方法。它包括硬钎焊、软钎焊等。

焊接连接多用在连接处需要密切不留痕迹的对接地方，例如船舶外壳的板材必须用焊接连接，自行车车轮毂与车架，输气或输送液体的的管道连接、高压气体的容器等也多用焊接。图 2 所示就是进行船舶外壳焊接的情形。

焊接连接的优点是连接比较密实，不会有漏气漏水的问题。焊接可以减少结构的总重，比起铆接和螺栓连接节约不少材料。另外焊接连接的强度一般不比基材的强度差。所以焊接被广泛应用。

但是由于焊接的地方是要经过加热熔化，所以局部的金属组织结构就有被改变的可能。焊缝的两侧在焊接时会受到焊接热作用时，发生组织和性能变化，这一区域被称为热影响区。焊接时因工件材料焊接材料、焊接电流等不同，焊后在焊缝和热影响区可能产生过热、脆化、淬火硬化或退火软化现象，使焊件性能下降。还有一个问题就是由于加热后构件连接在一起，在冷却后，构件在焊接时温度高低分布，所以在冷却时不同点的收缩比例也就不同，就会产生焊接残余应力和焊接变形。这些都会降低焊接的质量，使结构精度降低并且在受力后比较容易破坏。为克服焊接产生的这些问题，需要调整焊接条件，焊前对焊件接口处预热、

焊时保温和焊后热处理可以改善焊件的焊接质量。另外，由于操作不当，焊接有时会产生焊接缺陷，使焊接处产生气泡、焊缝留有未焊透的空隙和焊缝留有焊渣等问题。

§2 铆接



图 3 建于 1908 年的上海百年浙江路桥

铆接就是把两个厚度不大的板构件，通过在要连接的部位上打洞，然后将铆钉放进去，用铆钉枪冲击或加压机将铆钉铆死而将两个板构件的物体连接在一起的方法。比起焊接来说，由于焊接是把两个构件的通

过原子分子的结合而融合为一体，而铆接，两个构件物理上还各是各，只是通过铆钉把它们连接在一起。所以铆接比起焊接来说，密实程度要低。但由于铆施工比较方便，所以还是有大量的结构使用铆钉连接的。我们在第一节中谈到巴黎的埃菲尔铁塔，就全部是用 250 万个铆钉把 18038 个构件连接在一起的。图 3 是上海建于 1908 年的浙江路桥。可以看出全桥密密麻麻的铆钉，完全是用铆钉连接的钢结构。图 4 是凸头铆钉铆接的过程。

铆接有热铆和冷铆的区分，冷铆要求铆钉的可塑性比较好，在常温下就能够产生镦头那样很大的塑性变形把构件铆死，对于比较大的构件，铆钉尺寸比较大，不妨说钉杆大于 10mm 的钢铆钉则需要热铆，即把铆钉加热到 1000° C 左右能够产生足够大的塑性变形的条件下，进行冲击铆接。

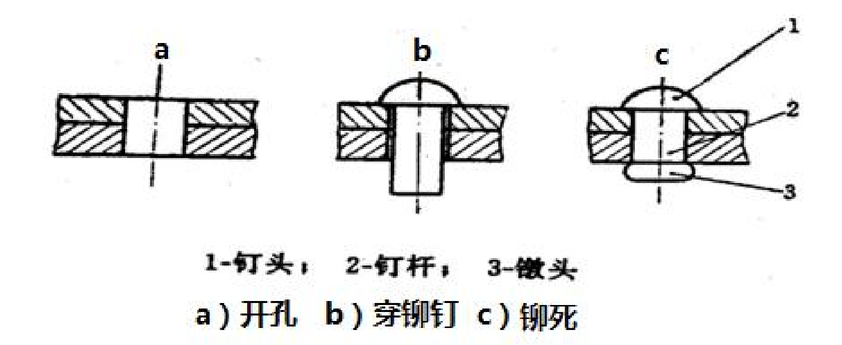


图 4 一般凸头铆钉铆接的过程

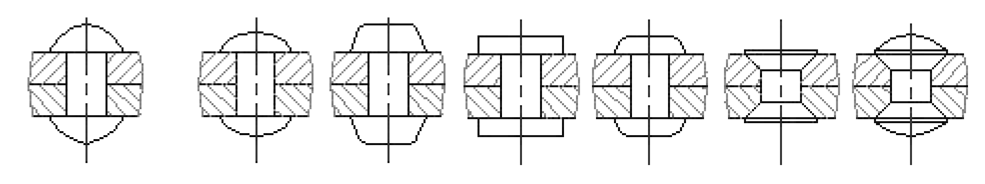


图 5 各种铆钉头部形状和埋头铆钉

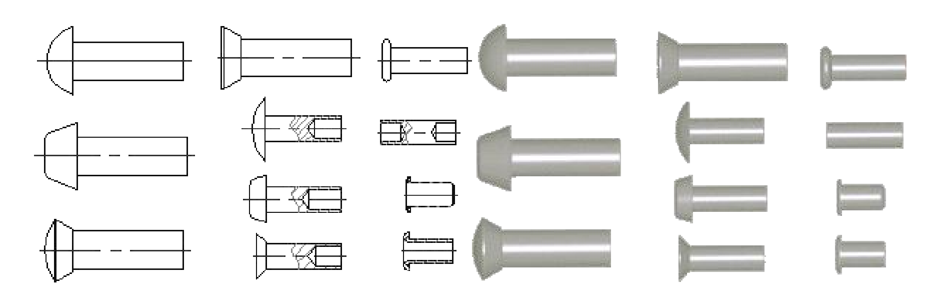


图 6 各种实心和空心的不同的铆钉

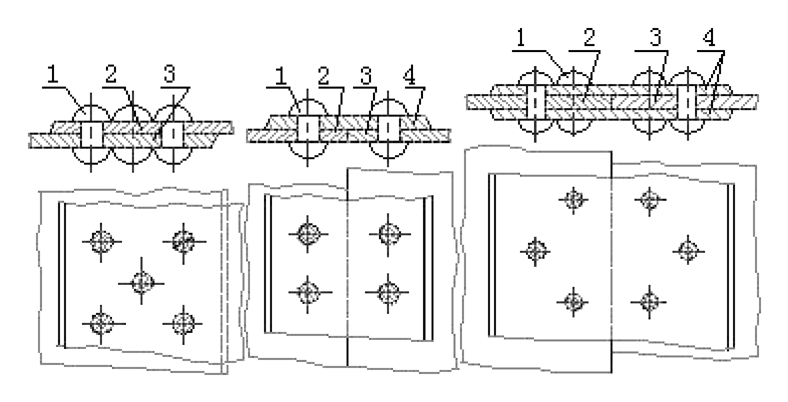


图 7 典型的铆接件， 1 为铆钉； 2 、 3 为被联接件； 4 为盖板。

一般凸头铆钉会影响连接后结构的外形，例如在飞机蒙皮上用铆钉，铆钉的凸起对空气动力有影响，所以人们研究出许多新型的埋头铆钉，

如图 5。在对外力的反应来说，铆接比焊接对冲击和振动的耐受性要好得多，所以钢结构桥梁结构多用铆接。

§3 螺栓连接

谈到螺栓连接，需要把话拉长一点，先从钉子谈起。因为从钉子到螺栓都统称为紧固件。

钉子的历史很长，无论中外，最早手工打造的钉子都是四棱形的椎体。自人类有铜的时代就开始有这种钉子，后来有铁器了又有铁制的钉子。这些钉子一直是用来连接木质构件的，特别是小的木质构件。至于建筑结构上的大构件，称为大木作，还有比较精致的家具，一般都用榫卯连接而不用钉子。一直到 19 世纪，所有的钉子都是手工制作的。机制的钉子，是分两步走的，最早的机制钉子是将一块适当厚度的铁板，宽度与钉子的长度一样，靠机器一条一条地剪切下来，进一步捶锻撴出顶头，这种办法称为剪板法，西方各国一直沿用到二十世纪初。所制造出的钉子仍然是四棱锥形，比起手工钉子略扁。



图 8 上边为手工钉、中间为剪板钉、下边为铁丝圆钉

后来由于发明了轧制铁丝或钢丝的方法，人们把成盘的铁丝剪成一段一段，然后把一头撴出钉头，另一头锻尖，这就是铁丝法制钉。用铁丝制作钉子是十九世纪末的事情。到二十世纪初才得到大规模生产普及应用。也就相当于清末民初，这种机制圆钉才大规模进口到中国，淘汰掉中国老式手工方形钉，中国人早先称这种圆钉为洋钉。（图 8）

螺丝的生产大约是和近代产业革命同步的，在 18 世纪 70 年代英国人发明了车床，于是就能够用车床车螺丝了。一直到 19 世纪中叶，人们一直是用车床来车螺丝的，到 1836 年美国人才开始有螺纹滚压工艺的专利，螺丝才开始能够大规模生产。用车床车螺丝，既浪费材料又费工，所以要作为大规模紧固元件是不可能的，滚压螺纹既省料又省时，这才为螺丝作为的紧固件的普及开辟了道路。所以实际上，大规模把螺丝应用到钢结构构件的连接上，是 19 世纪末到二十世纪初的事情。

螺栓连接的最大的优点是施工简单，拆卸和重组装都很方便，所以适宜用螺栓连接的地方大半都会采用螺栓连接。特别是在机械行业，小到钟表大到大型发动机，大部分构件都是用螺栓与螺母连接的。迄今螺栓连接已经发展得花样繁多。小的螺丝有使用十字和一字不同改锥的，大的螺栓有外六角和内六角的。特别是国际上比较流行的有两种标准，即公制与英制。此外还有美制螺纹标准。我国一般都采用公制，遇到别的标准的构件使用的时候需特别注意。图 9 和图 10 是一些常见的紧固件。

图 11 是有工字钢用螺栓连接成的框架结构在一个节点上的情形。有一种把两根杆件接续起来的方法（图 12），就是套筒连接，把要接续的两端都攻出螺纹，然后用有螺纹的套筒把它们连接起来。

近年来出现了一种装配式网架结构（图 13），其施工方式很简单，把构件运到现场，一个个构件的螺纹端拧进由连接球组成的节点就完成了。每根杆两端是不同的，一端直接由螺纹连接连接球，另一端要由高强度螺栓来连接杆与连接球（图 14）。



图 9 小的螺丝与螺栓紧固件



图 10 螺栓与螺母



图 11 用螺栓连接的钢结构节点



图 12 用套筒把两根钢筋连接在一起

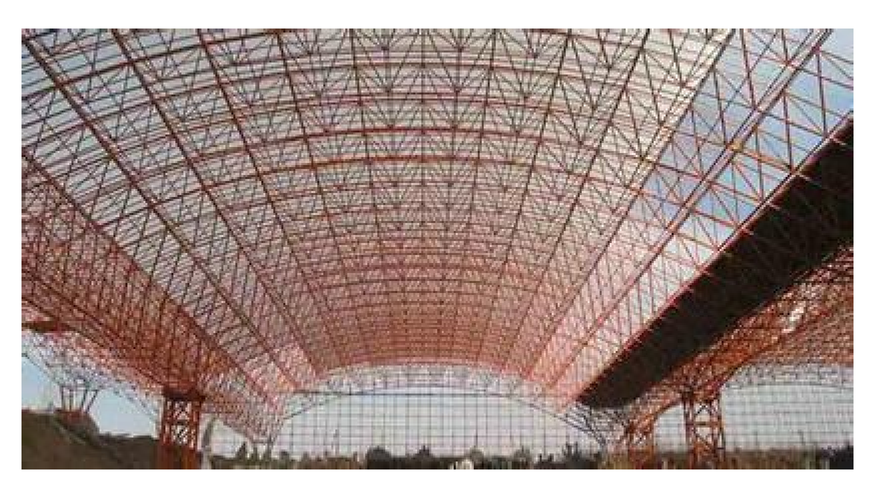


图 13　网架结构



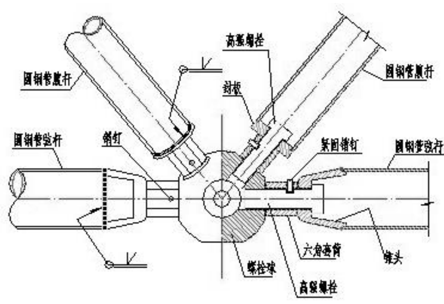


图 14 网架的连接节点

§4 胶接

胶接是利用胶粘剂在联接面上产生的机械结合力、物理吸附力和化学键合力而使两个胶接件起来的方法。胶接不仅适用于同种材料，也适用于异种材料。胶接工艺简便，胶接件不大产生变形，接头应力分布也比较均匀，胶接处具有良好的密封性、电绝缘性和耐腐蚀性。

人类应用胶接的历史很长，有几千年的历史。早期一直是使用天然的皮胶、鱼鳔胶、淀粉胶和树脂胶等。胶接的构件又以木质构件居多，大部分情形下，榫卯连接与胶接并用。二十世纪三十年代出现了高分子化学工业，有人造树脂人造橡胶的出现，之后以这些高分子材料为基料的粘结剂大量出现。二次世界大战期间，英国人把胶接法用在部分飞机结构上，后来德国人又把它用于钢铁构件的连接。

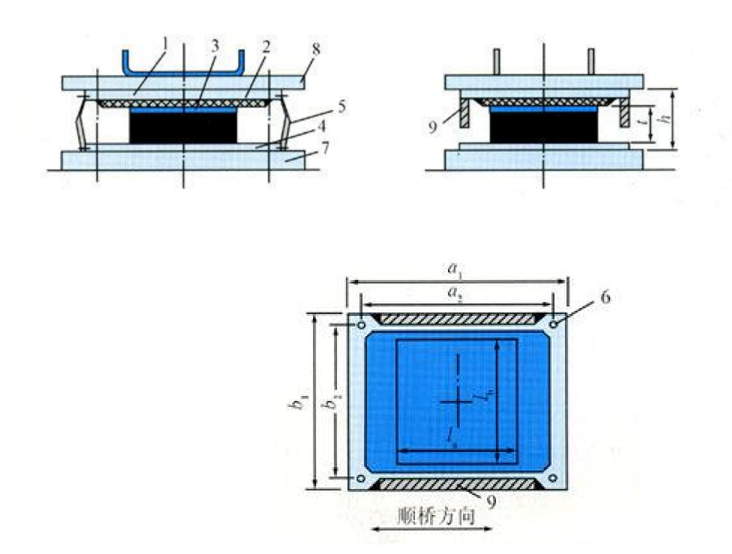
即使在现今，胶接技术仍然大量用在木材加工上，用在大量的层合板、组合版、木制家具上。胶接技术还大量用在金属与非金属构件之间的粘结，修补含有沙眼和磨损的机械零件。对于受力不大的构件之间的连接可以直接使用胶接，对于受力较大的构件之间的连接则可以与铆接、螺栓连接联合使用。胶接能够减轻结构的重量，所以胶接被大量应用于航空工业中，特别是近年来航空工业中复合材料的大量应用，胶接技术用得也就随之增加。

在介绍完构件的主要连接方式后，我们还要介绍一种不用连接的连

接方法。这种连接方法，很简单，起源很早，即把一个构件简单地搁置在另一构件上。随着结构愈来愈大，愈来愈复杂，这种简单搁置的连接方法又产生重要的应用。当结构的跨度很大时，例如桥梁的跨度很大时，梁随温度变化的伸缩变形就会相当可观，如果采用我们上面说的那些把构件固接的连接方式，桥梁的伸长就足以引起桥墩的破坏。为此就要采用一种柔性连接的方式把桥梁与桥墩连接起来。这时也不能采用简单的搁置 ，因为桥梁很重，梁和桥墩之间的摩擦力很大，桥梁还是无法自由伸缩。为此人们研究一种特别的桥梁支座。目前一般是采用一种不可压缩但易于产生剪切变形的材料做成支座（图 16）。当然还有滚柱式或其他的方式，不管是什么方式，其原理是要在上部结构变形时对下部构件的受力影响不大。这种连接方式统称为柔性连接。



图 15 桥梁的支座



1-上钢板，2-不锈钢板，3-四氯滑板支座，4-下钢板，5-防尘罩，6-锚固螺栓孔，7-支座垫石，8-梁底预埋钢板，9-导向板

图 16 四氯滑板支座示意

我们已经介绍过迄今为止，各种材质构件连接的最主要的几种方式。一种方式的应用与推广，首先要考虑的是它的力学上的合理性与强度上的可靠性，其次便是他是不是方便和便于普及。在满足力学上的合理性的前提下，人们研究和改善各种办法使它易于推广应用。例如现今人们下大力量研究的焊接与铆接的自动化，焊接机器人就属于这方面的努力。加强自动化不仅能够节省人力，同时又能够改善连接的质量，使连接更

为可靠。胶接法施工比较方便，但是在强度方面的可靠性就不容易控制，提高胶接技术的力学和强度性能乃是当今对胶接技术研究的重点。

2016，8，23

8 略谈结构力学

前面我们简单介绍了结构、结构元件和构件的连接，现在我们要简略地介绍一下结构力学了。

结构力学的任务是什么呢？简单说就是要设计的结构既安全又经济。就这么一句话，却是很费理解的，而且人类经过了几百年的努力，又需要方方面面的合作才能够完满地达到。

首先，一个结构要承担它的使用功能，例如建筑在南方沿海的一座楼房，它不仅要承受日常的载荷，如在楼内生活的人群、各种家具和附属物对楼产生的载荷，楼还要经受台风的考验。建在地震区的结构又要经受地震的考验。结构设计者就要借助结构力学，使设计的结构在以上各种使用的条件下，结构不会丧失它的功能，即使在极端不利的条件下，结构可以开裂或受损，楼房中的人也应当是安全的。一句话，所谓安全，就是要保证结构有足够的强度、刚度和稳定性。从另一方面说，如果为了安全，把结构做得特别结实，多用材料用好材料，楼房多配钢筋做成一个铁疙瘩行不行呢？那样又太浪费了。结构力学就是要帮助设计者掌握一个度，既要安全又要经济。所以结构力学，实在是现代结构设计最重要的知识。

结构力学是怎样做到这一点的呢？从广义的结构力学来说，它需要

解决以下三方面的问题：确定结构所受的外力（包括外力、外部热、电磁场等条件）；根据外力和结构的材料性质分析结构内部每一点的应力应变状态和位移；根据得到的应力状态和位移判断结构在所给定的条件下判定结构会不会破坏。

这三个方面的问题，一直是有关结构研究的主要方面，由于问题的复杂性，即使到现在，也不能说都研究清楚了。

对于第一方面的问题，要确定作用在结构上的外力，是很复杂的任务，对于作用在结构上的静力，像结构的自重、加载在结构上的负重（如桥梁上的车辆等）是比较容易弄清楚的，但是作用在结构上的风载、雪载、地震载荷等就不容易弄清楚了，它不仅与风力和震级的大小有关，还和结构所在的地区有关，盖在海南岛与盖在北京的房屋结构，应当考虑的风载就不应当一样。所以就与该地区长期对风速和地震的记录资料是紧密有关的，从这些资料经过专门的分析得到一个该地区设计时应当考虑风力和地震的震级，进入设计规范。类似地，车辆在不平路段行进的颠簸所形成的载荷、船舶在波浪起伏的海上所受的载荷、飞机在航线上由于气流的不稳定所应当考虑的载荷，这些都是要经过大量的资料和实测才能确定下来的。这些资料，也是一个国家设计水平的一项基本建设。

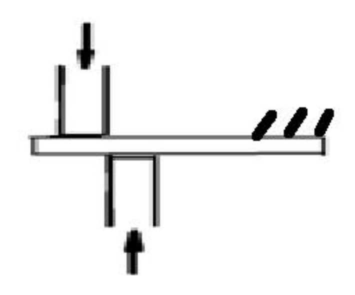


图 1 受剪切的钢棒

对于第三方面的研究，即关于材料强度方面的研究，有很长的历史。1638 年，伽利略在他的《关于两门新科学的对话》中，就讨论了材料在受拉伸时的强度问题。后来人们发现材料不仅能够拉断，还会被剪断，如图 1，上下两个冲头作用下，中间的钢棒会被剪断，而钢棒并没有被拉伸。所以材料的断裂强度问题是足够复杂的。后来人们总结出对于均匀材料根据应力或应变状态的强度判据，不过这还是不能满足需要。随着材料的种类增加，不同材料有不同的强度特点，例如混凝土受压强度很高而受拉的强度又很低，还有各向异性材料，例如木材对于不同方向受拉强度差别很大。进而，材料在不同温度下强度的表现不同，材料在载荷作用下经受的时间长度会影响强度，材料在交变应力作用下的强度，即材料的疲劳强度和损伤的问题都是工程实际中经常遇到的问题。所以材料强度问题，即使到今天，仍然是一个需投入力量研究的方向。

现在我来着重谈谈结构力学第二方面的问题，即根据外力和结构的材料性质分析结构内部每一点的应力应变状态和位移。从根本上来说，结构能够安全，首先是把结构内的应力应变和位移分析得准确，因之这个环节又称为结构分析。从狭义的观点来看，人们经常说的结构力学，主要就指的是结构分析。从历史发展上来看，从狭义的意义上来看，所谓结构力学主要是指杆件系统的应力应变和变形的分析。这是因为，这部知识分形成得比较早，它是结构力学最早系统化的知识。我们现在就着重来谈谈关于杆系的结构力学问题。这是因为关于板壳弹性力学，后来都形成专门的学科。

杆系结构力学的发展是分两步走的。第一步首先是对一根杆件的力学分析，也就是对于梁的弯曲和杆的拉伸扭转问题的解决；第二步才是考虑许多杆组合在一起的结构系统的分析问题。

杆的压缩和拉伸的受力问题相对简单，早在 1638 年，在伽利略的巨著《关于两门新科学的对话》中，就已经大致解决了。所以说是大致解决，是在直杆在受轴向压力或拉力的条件下，杆的内力能够准确地求得，然后用截面大小去除，得到的是单位截面所受的拉压力，用来表征材料的受拉压的强度。

至于这时产生的变形，那要等到 1678 年英国人胡克提出物体的弹性之后才逐渐弄清楚的。说到等截面直梁的弯曲问题，那的确是经过了相

当长的时期才搞清楚。即使把1638年伽利略在他的《关于两门新科学的对话中》作为精确研究梁的弯曲的研究的开始，直到1826年，法国学者纳维（Louis-Henri Navier ，1785 –1836）在他的《力学在结构和机械方面的应用》一书的出版，才算是最后完成，经过了近200年的漫长岁月。这期间，有许多学者对梁进行了研究，其中最重要的是雅各布•伯努利（Jacob Bernoulli，1654-1765）于1705年发表的论文《弹性梁的弯曲》提出了平截面假定，即梁在变形时梁的横截面保持平面，由此，梁的控制方程大大简化，不过由于他们在求解的过程中，对梁的中性轴（即梁在变形时截面上没有拉压的那点所形成的轴）的位置设定的不正确，所以还是不能得到正确的结果。中性轴的问题由纳维最后解决了，他严格论证，在纯弯曲条件下，梁的中性轴的位置应当是截面的形心。在结构力学中纳维最早提出了超静定结构的概念，并且给出了求解的方法，也就是说这类问题单靠平衡方程不能得到结构内力的全部解，需要加入结构的变形求解，例如图3左那样多根杆的系统与右边的一端固定一端简支的梁就是这样的系统。

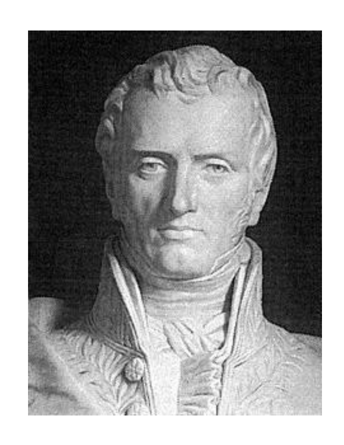


图 2 纳维像

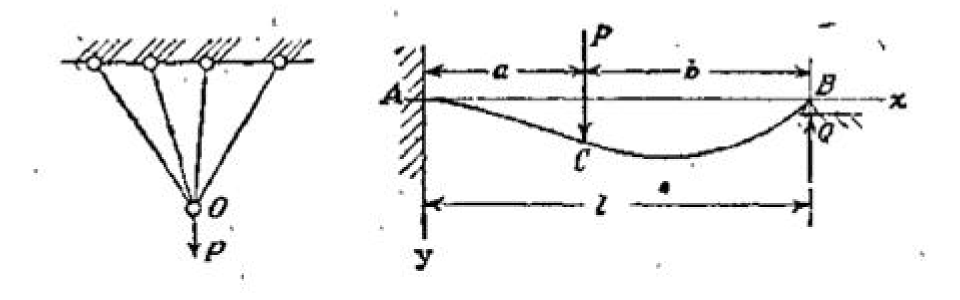


图 3 纳维讨论的超静定结构

纳维在他的《力学在结构和机械方面的应用》这本书中，还讨论了挡土墙、桁架、拱、板等结构问题。可以毫不夸张地说纳维的这本书是结构力学中第一本比较全面阐述结构力学的专著，它标志着结构力学成

为独立的学科分支。

19 世纪 50 年代，由于炼钢技术的普及，用钢铁作为结构随之也得到普及。钢结构比起用木材和砖石的结构要复杂许多，也轻巧许多，于是就要求结构力学适应新的复杂性的要求。要求更简单易于掌握、适应于分析大量构件组合的结构系统的结构分析方法。适应这样的要求，德国工程师卡尔•库尔曼（Karl Culmann，1821 －1881）于 1851 年之后将他扩张了的桁架理论进一步发展，用图解的方式去求解，后来称为图解静力学。再后来，曾经在高等学校教学的一些学者：德国物理学家麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831-1879）、德国工程师文科勒（Emil Winkler，1835-1888）、德国工程师莫尔（Christian Otto Mohr，1835-1918)、意大利学者卡斯提也努(Alberto Castigliano,1847-1884)、德国工程师穆勒（Heinrich Franz Bernhard Müller，1851-1925）、俄罗斯工程师科皮切夫（Viktor Lvovich Kirpichev，1845-1913）系统地发展了求解超静定结构的方法，这就是后来所称为的力法，他们还发展了图解力学，发展了强度理论。用形变法求解超静定刚架结构是由丹麦的工程师本笛克森（Axel Bendixen）在 1914 年给出的。同时，德国物理学家基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff，1824-1887）完成了弹性薄板的理论，英国学者乐甫完成了弹性薄壳的理论。所有这些发展成为现代结构力学的庞大的体系。这些基本上是在 19 世纪后半叶和二十世纪前半

叶形成的。

二十世纪五十年代电子计算机来到世界上，计算机最早的大规模应用就是用来解决力学问题。随后到六十年代，不仅原先的杆系结构力学问题能够用计算机求解，随着有限单元法的发展，原来办法不多的弹性力学和连续体的力学问题也能够用计算机求解。

随后大量的用计算机求解结构的计算机软件出现，并得到迅速发展，包含二维元、三维元、梁单元、杆单元、板单元、壳单元、流体单元等多种单元、能解决弹性、塑性、流变、流体以及温度场、电磁场各种复杂耦合问题的软件以及软件系统不断出现。在 10 多年内生产与销售有限元软件形成了有相当规模的社会新产业，而且使用有限元法解决实际问题迅速在工程技术部门普及。1960 年克劳夫在匹兹堡举行的美国土木学会电子计算会议上的《平面应力分析中的有限元法》是最早提到有限元的论文。之后有限元的论文、文集、专著大量涌现，专题学术会议不断召开。新的单元、新的求解器不断提出，先后有等参元、高次元、不协调元、拟协调元、杂交元、样条元、边界元、罚单元等不同的单元，有带宽与变带宽消去法、超矩阵法、波前法、子结构法、子空间迭代法等求解方法，还有网格自动剖分等前后处理的研究，这些工作大大加强了有限元法的解题能力，使整架飞机、整条船这样的复杂结构能够一次进行应力和变形分析，使有限元方法逐渐趋于成熟。

结构力学尽管有了空前的发展，不过对于许多非线性结构力学问题，人们的办法还不够多，还有待进行研究。要达到对结构认识的完全自由人们还需要准备走很长的路。

参考文献

[1] Karl-Eugen Kurrer，The History of the Theory of the Structures—— From Arch Analysis to Computational Mechanics，Ernst & Sohn a wiley company，2008

[2] 武际可，力学史杂谈，结构力学的回顾与发展，高等教育出版社，2009,

2017，3，31

9 静力学与超静定问题

静力学是关于物体所受力的合成、分解与平衡的学问。在静力学理论形成的过程中，有两位学者起了关键作用：一位是古希腊的阿基米德（Archimedes, 287 BC---212BC），另一位是荷兰的斯梯芬（Simon Stevin,1548－1620）。阿基米德的著作中系统地解决了平行力的分解与合成问题，而斯梯芬在著作《平衡术》(De beghinselen der weeghconst，1586)中最后解决了两个不平行力的合成问题，也就是二力合成的平行四边形定理。

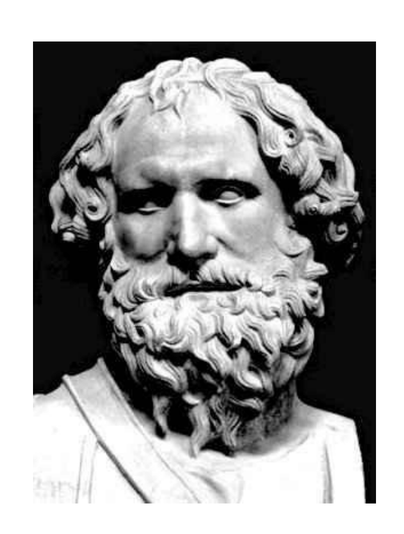


图 1　阿基米德像



图 2　斯梯芬像

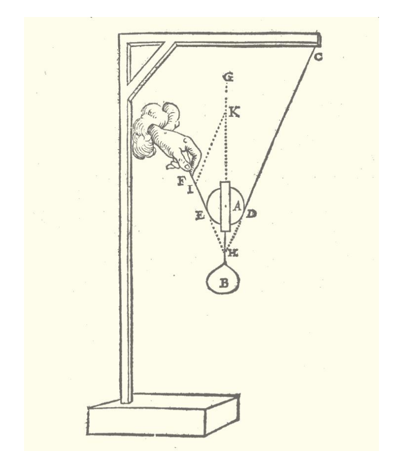


图 3　　斯梯芬书中关于二力合成的一张插图

阿基米德以前介绍得比较多，一般比较熟悉，现在简单介绍一下斯梯芬。斯梯芬是一位军事工程师，曾当过商人的雇员。也可能是，他是文艺复兴以后第一位认真对力学问题钻研的人。斯梯芬和伽利略几乎是同时代人，他比伽利略年长，但是他们研究的领域是不同的，斯梯芬是在静力学方面的奠基人，而伽利略则是动力学的开山祖师，斯梯芬侧重在地面上的实际工程问题，而伽利略则对天体的问题有兴趣得多。斯梯芬是一位有多方面贡献的学者，在力学、数学、物理、建筑、军事工程、水利、音乐等方面都有重要贡献。值得注意的是，在音乐方面他独立发现了十二平均律，比明代朱载堉略晚。

斯梯芬在静力学上不仅对刚体，而且对流体静力学也做出了宝贵贡献。从他的著作中，已经可以看到虚位移或虚速度原理的萌芽。

在研究滑轮和滑轮组时，斯梯芬发现：在任何这种滑轮系统中，每个被支承的重物与它由于该系统的任意给定位移所带动而移过的距离的乘积在整个系统中处处相等时，该系统仍保持平衡。

斯梯芬得到了斜面上物体平衡的条件与力合成的平行四边形定律，不过他没有给出证明，而是通过直觉给出的。他的思想是这样的：如图ABC 直角三角形上挂以等距等重球组成的链，将 AC 直线下面的各球割去与否都仍应平衡。于是每边压于边上球的总重，与三边的长度呈正比。所以，如果用 F_{AB}, F_{BC} 分别表示每边上每个小球的力那么必有

$$F_{AB}\times AB=F_{BC}\times BC$$

令 $\alpha=\angle A,\gamma=\angle C$ 则有 $\sin\alpha=\dfrac{BC}{AC},\sin\gamma=\dfrac{AB}{AC}$，所以有 $\dfrac{F_{AB}}{F_{BC}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. 这一事实用文字表示出来就是，放在斜面上的物体所受沿斜面方向的重力与倾角的正弦成正比。

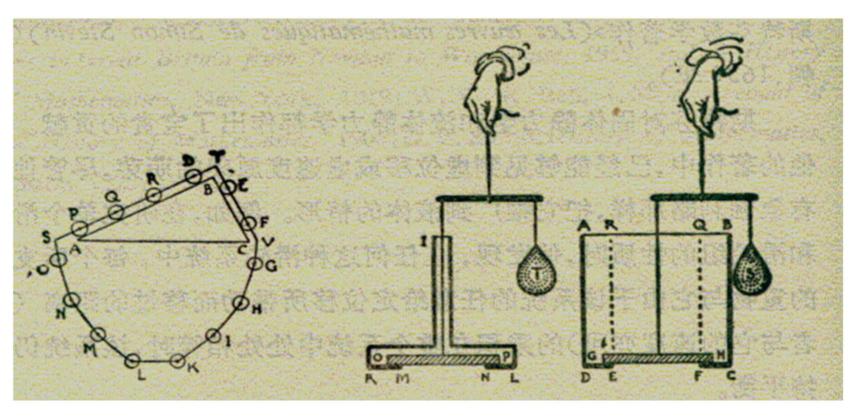


图 4　斯梯芬的实验示意图

由此启发，他做了实验，如图所示，得到了平行四边形定律。

斯梯芬进行了流体压力实验，称为“流体静力学悖论”：承受的总压力与面积的大小和它上面的液体的柱高的乘积呈正比，而与容器的形状无关。这个结论再前进一步便是所谓的帕斯卡原理。他还测定了液体内各点的压强。

斯梯芬研究了浮体平衡问题。他发现物体的重心必与浮心处于同一垂线上。他猜想到：为了平衡稳定，物体的重心必须低于浮心，而前者比后者愈低稳定程度就愈高。现在看来，这后一半说法不对，应当是：浮体的稳定性由重心相对于定倾中心（液体向上压力合力的作用点）的位置来决定。

在动力学方面，斯梯芬在他的著作中描述了他与他的一位朋友所作的落体实验：取两个铅球，一个的重量十倍于另一个，把它们同时从离开一块板 30 英尺的地方坠落，他们看到，它们似乎同时到达这块板。这是第一次对亚里斯多德关于不同重量下落速度不同理论的反驳。

斯梯芬在数学上的贡献是引进了十进小数。在他之前，欧洲人记数，大多采用古罗马记数法，如把 348 记为 CCCXLVIII。意大利的达•芬奇把印度的十进制记数法传到了欧洲，但是还没有使用十进小数。斯梯芬引进了十进小数的思想是很了不起的，不过它迟迟不能推广。过了 200 多年，在法国大革命后的第二年，于 1890 年才在法国以法律的形式肯定下来。即使这样，在英国、美国等一些国家，至今有的书上还在使用 12 进制的单位。

好，我们回过来讨论静力学。在古希腊时代，通过杠杆的研究已经知道力矩平衡的规律，现在又知道二力、三力合成与平衡的规律。有了这两条，我们便可以去处理一切刚体的平衡问题，也可以处理一切复杂

力系的化简问题。所以人们常说，斯梯芬与阿基米德是静力学的奠基人。

不过只有阿基米德和斯梯芬的工作，虽然已经能够解决许多静力学问题，例如一些物体的重心、求简单平行力、汇交力的合力等。但是还不能说静力学理论体系已经完善了。在他们之后还应当提起两位法国人在静力学上的工作，他们是：瓦利农（Pierre Varignon,1654－1722）和路易·班瑣（Louis Poinsot,1777－1859）。两位前后相差一百多年。

瓦利农，他从 1686 年起开始了他的数学教授生涯，它与当时的名人牛顿、莱布尼兹和伯努利家族都有交往。他的出名主要在于传播科学和教学上，比他晚了大约一百年，由于拉格朗日引用他的工作，他才得以闻名于世。他一生写过几部数学教科书，在力学上的主要著作是 1725 年出版的《新力学》，主要贡献于图解静力学和静力学。他在静力学上至今仍为人知的工作是：如果力系等价于一个过一点的合力，则它也等价于一个过另一点的合力外加一个与这个合力垂直的力偶矩，这个结论现在被称为瓦利农定理；他在研究力的合成时引进了实际上就是现在的向量积的概念。

路易·班瑣，大学时期在巴黎综合工科学校学习，毕业后任道桥工程师。1804 年起到大学任数学教授，从 1809 年起，在巴黎综合工科学校任教。1813 年被选为法国科学院院士，继承拉格朗日的席位。

班瑣对力学的主要贡献集中在他所写的《静力学原理》（1803 年）

与《力偶转动新论》（1834 年）两书中。在这两本书中，他虽然对静力学的基本原理上没有提供多少新东西，但却重新整理了这门学科，使力系的简化至于比较完善的水平。他最重要的贡献是系统讨论了力偶的性质。提出了明确的静力平衡条件，即合力为零与合力矩为零。



图 6　班琐像



图 5　瓦利农像

根据班琐总结的静力学结论，我们来看刚体的平衡条件。作用在一个刚体上面的合力与合力矩要等于零，在一般的情况下，一共可以得到六个标量等式。就是说，如果表述作用在它上面外力的未知量，有六个或六个以下，我们可以通过这六个等式把它们求解出来；如果表述作用在它上面外力的未知量大于六个，则由我们仅有的六个平衡条件等式，不足以把它们完全确定下来，这种情况我们就称为超静定问题，有时也称为静不定问题。在比较特殊的条件下，例如考虑所有的力是交于一点的情形，这时合力矩对这一点是自然为零的，所以只能得到三个方程，这时如果表述未知外力的未知量超过三个，由静力学的平衡条件就没有办法得到全部未知量，就属于超静定问题。

作为例子，我们考虑如图 7 两个人抬一段木头的问题。如果已经知道木头的重量和它的重心的位置，也知道两个抬木头的人与重心的距离，两个未知的抬木头的力是与重力平行且向上的。这时由平衡条件我们有两个等式，一个是重力与两个抬木头的力之和为零，还有一个是三个力对某一点的力矩之和为零，于是我们就能够有这两个等式把两个抬木头的力确定下来，就知道每个人承受的力是多少。

图 8 是四个人抬木头，左边的情形要确定各人承受的重力是不可能的，因为它是一个超静定问题，而采用右边的方案，则很容易从木头的受力平衡和两根抬杆的受力平衡把各人所承受的重力求出来，它是一个

由静力平衡条件完全可以确定下来的问题。其实即使是三个人抬，也是一个超静定问题。

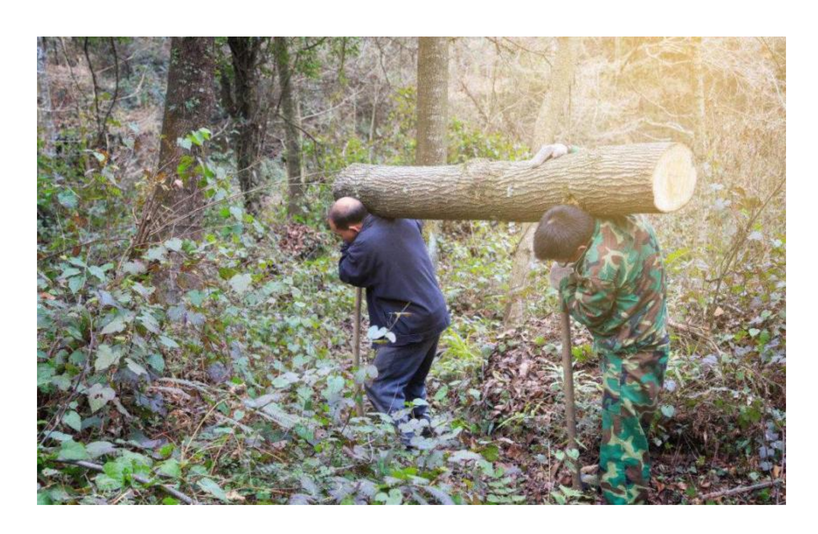


图 7　二人抬木头



图 8　四个人抬木头



图 9 这个八抬大轿是静定的八个人平均分配重量



图 10 一根多支承的连续梁

图 10 是一个支承在多个桥墩上的连续梁，即使已经知道桥上车辆的重量和重心位置以及桥的单位长度的重量，因为支承的个数大于二，所

以要求桥墩的支撑力也是一个超静定问题。

上面说的静力学处理仅由一个刚体形成的问题，还是比较简单的。对于有许多刚体组成的结构来说，就要复杂得多。例如我们讨论过的桁架，就是由许多杆件连接在一起的结构。我们说过桁架的每一根杆只承受拉压力。桁架的连接点是铰接，而且外力只作用在节点上。桁架设计的最基本的任务，是要根据它所受的外力计算出每根杆件所受的力。

我们首先要问，怎样的桁架是只用静力学就能够计算出它每一根杆的受力，这就是静定桁架；而怎样的桁架单凭静力学没有办法算出每一根杆的受力，这就是超静定桁架。这个问题困惑了结构工程师们许多年，最后于 1864 年才由麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831～1879）解决的。这就是静定与超静定桁架的判据。

麦克斯韦是这样解决这个问题的。

考虑一个桁架，把它孤立出来，它所有承受的外力，包括约束力都已经通过静力学求解出来了。它由 p 个结点 s 根杆构成，我们对它的每一个结点的外力和所有对这点连接的杆的作用力列出平衡方程，由于是共点力，所以在一般情形下，合力在三个相互垂直方向的投影要等于零，即每个节点有三个方程。整个结构一共能够得到 3p 个方程。不过这 3p 个方程是不完全独立的，需要去掉整个结构外力已经满足的静力学六个平衡条件。事实上，把 3p 个平衡条件相加，就得到整个桁架上外力平衡

条件，把 3p 个平衡条件求和对某一点力矩，就得到整个桁架上外力矩为零的条件。这是因为，对桁架中的任何一根杆对两端结点的作用力是大小相等方向相反的，求和时它们会互相抵消。可见对这个桁架从静力学能够得到的独立的平衡条件是 3p-6 个。这就是说，对于一般情形的桁架，只有杆数 s=3p-6 时，桁架才是静定的，当 s 大于 3p-6 时，桁架就是超静定的了。

同样的道理，对于特殊的平面桁架，即杆件都处于一个平面内，外力也作用在这个平面内，这时只有当 s=2p-3 时，桁架才是静定的，当 s 大于 2p-3 时桁架就是超静定的。这是因为平面桁架每个节点的平衡条件是两个，整个桁架的平衡条件是 3 个。

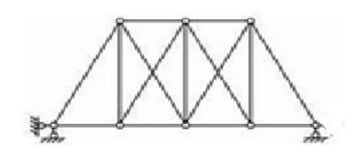


图 11 一个超静定桁架

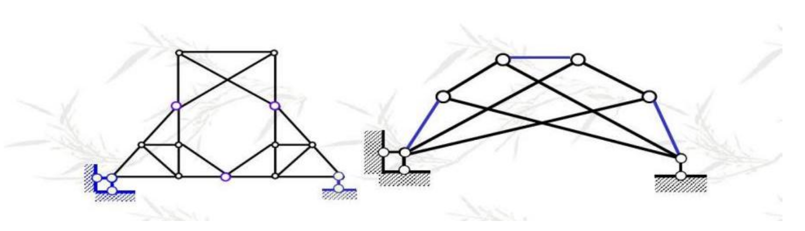


图 12 两个静定桁架

在这里我们需要顺便对麦克斯韦做一个简单的介绍。他是英国著名的物理学家，是剑桥大学卡文迪什实验室第一任主任。在 1850 年，他还只有 19 岁的时候，发表了一篇题为《弹性固体的平衡论》的论文。文中讨论了若干个弹性力学的特殊问题，如三角形受力问题等，这些问题的精确解大半已为其他学者解出。他把这些解与利用光弹性方法测得的结果进行验证，结果符合的很好。所以后人认为麦克斯韦是以光弹性方法实际求解弹性力学应力场的第一人，也是光弹性仪器的实际发明者。

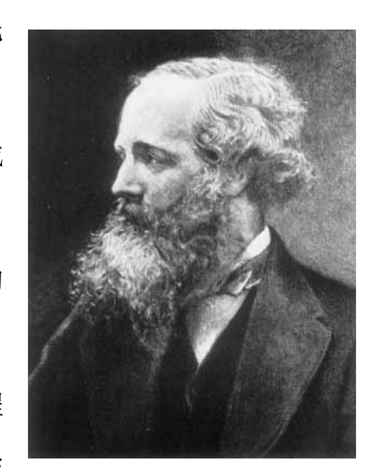


图 13 麦克斯韦像

到 19 世纪末，光弹性方法迅速扩展成为测量应力方法的重要手段。

麦克斯韦在早期做了弹性力学与结构力学的研究之后，兴趣转向了光学、电磁学，他以综合提出控制电磁场的麦克斯韦方程而出名。由于狭义相对论早先就是首先对控制电磁场的麦克斯韦方程讨论引出矛盾才出现的。所以我们需要顺便介绍他在物理上的贡献。

麦克斯韦 1850 年以优异的成绩考入剑桥大学。1856 年在阿尔伯丁被任命为教授，1871 年接受剑桥大学实验物理学教授的聘任。在剑桥期间组建了卡文迪什实验室。该实验室对 20 世纪的物理研究产生了巨大的影

响。

麦克斯韦在 1857 年对土星的光环进行研究时，他认为，如果光环是固体或液体的话，就会由于旋转时所受的引力和惯性力而破裂。只有光环是由无数小颗粒组成才会稳定的观点。随后麦克斯韦从微小颗粒的观点讨论气体，他考虑到分子不仅在各个方向上运动，而且在不同速度上运动，分子之间以及和器壁的碰撞是完全弹性的。由此和当时也讨论这个问题的奥地利物理学家玻耳兹曼（Ludwig Boltzmann，1844-1906)同时创建了麦克斯韦－玻耳兹曼气体分子运动论。他并且认为温度是分子运动的平均速度有关的宏观物理量，从而给以前流行的热质说的热流动的说法最后的打击。

玻耳兹曼还设想，如果有两个盛有相同温度气体的容器，有一个小门连接起来，有一个妖精把门，当运动慢的分子到右边门就打开，运动快的分子到左边，门也打开，它们向相反的方向运动，门就关闭。这样左边的容器就会愈来愈热，右边的容器会愈来愈冷。这是违背热力学第二定律的一种设想。这个妖精被称为麦克斯韦妖。

麦克斯韦发展了英国物理学家法拉第(Michael Faraday 1791－1867)关于电磁场的概念，用一组偏微分方程把电场与磁场连接在一起。这组方程后来被称为麦克斯韦方程组。他用这组方程证明了电荷的振荡会产生电磁波。并且提出光也是一种特殊的电磁波。这些看法后来都被实验

所证实。

麦克斯韦在流变学方面最早提出应力应变关系与时间有关的概念。并且引进了现今称为麦克斯韦粘弹性体的应力应变关系。此外他在数学上最早定义了向量场的旋度，他对陀螺仪、光学、彩色摄影、原子结构等方面也有重要的贡献。

虽然麦克斯韦在结构力学中有许多贡献，如求解超静定结构的力法，静定结构求位移的方法等。判定桁架的超静定，只是其中之一，不过由于他在物理中电磁理论和统计物理方面的名气太大，以至于，在他的一些传记著作中，连他在结构力学中的贡献，要么一笔带过，要么根本就不提起。

麦克斯韦是伟大的，很可惜天不假以寿，他逝世时年仅 48 岁。

最后需要说明的一点是，对于超静定问题，不仅需要动用静力学的全部方程，还要考虑结构的变形才能够把结构中的受力分析清楚。

10 桁架的节点为什么可以看作铰接？

桁架是一种普遍应用的杆系结构。图 7 与图 8 就是桁架结构桥梁。所谓桁架，就是杆系结构中的每一根杆都是结构中几何单形的一条边，对于平面桁架，单形就是三角形，每一根杆都至少是一个三角形的一条边，对于空间桁架，单形就是四面体，每一根杆都至少是一个四面体的一个棱。所以如果把桁架的每一根杆都看作刚体，它们所构成的杆系是不会变形的，是十分坚固的。

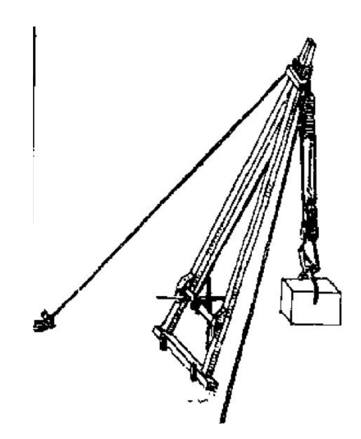


图 1 《建筑十书》中介绍的起重装置

桁架的历史是久远的。古罗马时代的建筑师维特鲁威（Marcus Vitruvius

Pollio，生于 80–70 BC,逝世于 15 BC）所著《建筑十书》中所介绍的起重机械（图 1）和攻击机械郝格托尔撞锤和龟（图 2）的结构可以看作最早的桁架。桁架在建造木桥和屋架上最先见诸实用（图 3）。古罗马人用桁架修建横跨多瑙河的特雷江桥的上部结构（发现于罗马的浮雕中），文艺复兴时期，意大利建筑师帕拉迪奥（Andrea Palladio，1508～1580）开始采用木桁架建桥，后来出现了华伦式、汤式、豪式等不同形式的桁架（图 4-6）。19 世纪五十年代之后才出现钢结构桁架。

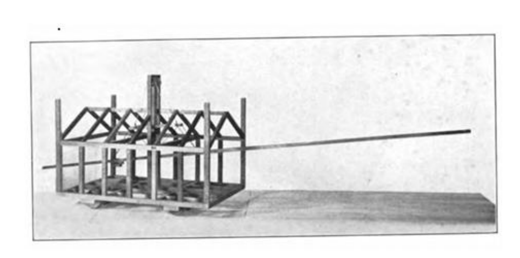


图 2 郝格托尔撞锤和龟

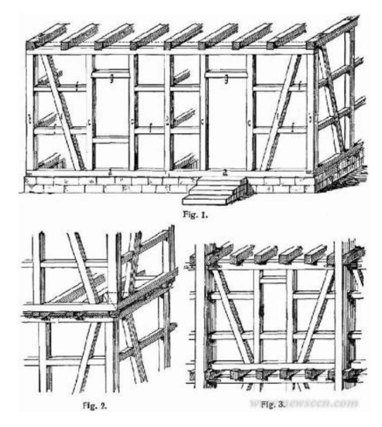


图 3 古罗马时代早期木结构桁架

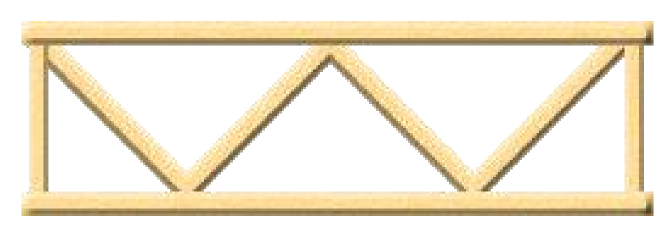


图 4 华伦式桁架（James Warren 1848 获英国专利）

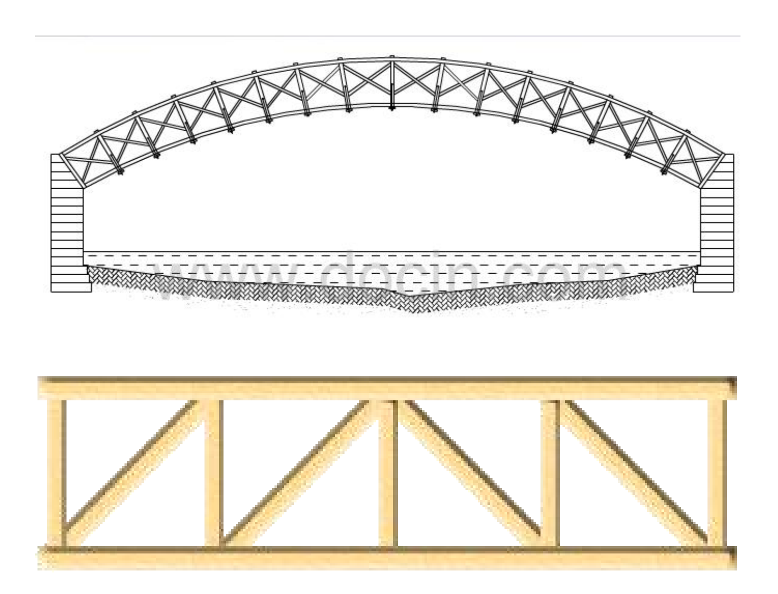
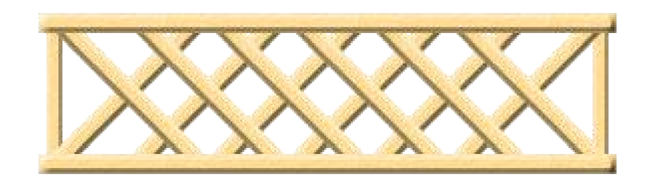


图 5 豪式（William Hawe 1840 年设计并得到专利）桁架，增加了竖直杆



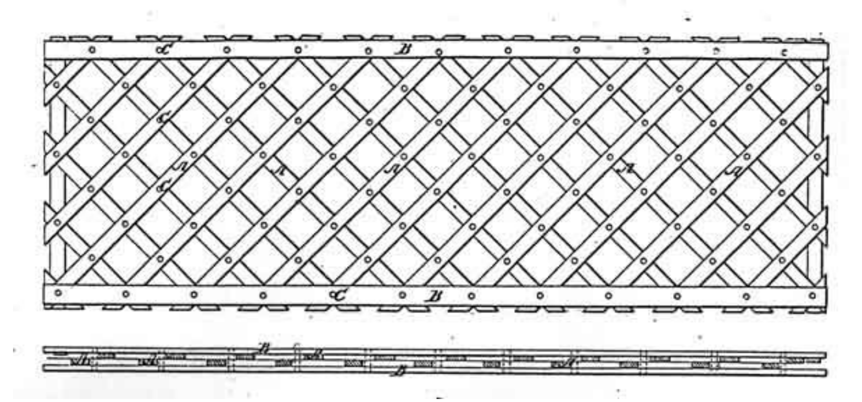


图 6 汤式网格（Ithiel Town 于 1820 年获英国专利）桁架



图 7 1924 年建成的上海浙江路桁架结构桥



图 8 施工过程中的桁架桥梁

结构力学在分析桁架的各个杆的受力时，需要简化。归结起来就是两条：一条是所有的外力作用在桁架的节点上；一条是桁架的所有的节点都是铰接的，也就是说每一根杆可以绕节点自由转动。这两条的实质结果是，桁架的每一根杆只受拉压力，不受弯矩的作用，亦即没有弯曲。

我们注意图 7、图 8 的桁架，前一个桁架的节点是铆接的，后一个节点是焊接的，都是固接，杆与杆之间并不能相互转动。为什么在做分析的时候却能够把这些节点简化为铰接的呢？这需要仔细说说。就是说，我需要估算在桁架的杆件变形时，杆件所受的弯曲程度。如果我们能够

证明在任何情况下，杆件弯曲所引起的应力比起拉压的应力都小许多，那么我们当然就可以略去杆件的弯曲，把桁架的节点看作铰接了。

不妨设杆的长度为 l，杆的截面尺寸为 a，而且 $a<<l$,即截面尺寸比长度小一个数量级。现在我们设杆系中有一根杆受拉（或压）力，力的大小为杆的比例极限，这是在设计时，杆能够承受的比较大的力了，因为大过它，材料就会受到不可恢复的塑性变形。一般在碳钢的情形，它相当于杆伸长（或缩短）了原长的千分之一，即 $l/1000$。还设这根杆一端是固定的，于是另一端就移动了 $l/1000$，于是在这一段相联接的另一根杆便产生了横向位移。不妨假定它的横向位移就是 $l/1000$（其实只有在另一根杆与变形的杆相互垂直时才是这样的，一般情形，横向位移要小）。

我来讨论，这另一根一端横向位移为 $l/1000$，一端固定的杆的弯曲变形。这是一根悬臂梁。设它在固定端所受的弯矩为 M，则由材料力学简单的计算可以达到位移端的横向位移应当是：

$$\frac{l}{1000}=\frac{Ml^2}{3EJ}$$

这里 E 是材料的杨氏模量，J 是截面的转动惯量。由这个式子可以求出杆固定端的弯矩 M，从而得到那里的最大弯曲应力

$$\sigma=\frac{6\times 3EJ}{1000la^3}$$

考虑到$J=\frac{a^4}{12}$于是上式就化为

$$\sigma=\frac{E}{1000}\frac{3a}{2l}$$

我们既然知道受拉杆的变形是 l/1000，它的应变 1/1000 是，所以拉压应力是$\frac{E}{1000}$，现在弯曲应力多出一个因子$\frac{a}{l}$，而且由于悬臂梁在固定端的应力是最大的，所以可知杆的弯曲应力比起拉压应力要小一个数量级。因之，在分析桁架的受力时，它各杆的弯曲应力是可以略去的。这就是为什么在分析桁架时假定节点是铰接的原因。

有一点需要附加说明的是，对于荷载都作用在节点上的假设，纯粹是为了在分析受力时没有受弯曲的杆件。如果有某一根杆外载是加在杆中间，那也很容易办，先把载荷等效地分配到临近的节点上分析桁架，然后只要对这根杆当作实际载荷与反向的等效载荷作用的梁来分析，把分析结果与桁架得到的结果相叠加就可以了。

以上对桁架所受弯曲的讨论，纯粹是从数量级上来考虑的，因为所设的条件都是不利的情况，实际情况远比所讨论中的弯曲应力要小许多。所以通常分析桁架，都可以放心地只考虑每根杆受拉力或压力就可以了。不过有时候还是需要仔细讨论桁架中杆件所受的弯曲情况的，例如在超静定结构中，有的杆变形比较大，已经超过比例极限产生了塑性变形，或者结构对变形的要求比较精密，需要考虑弯曲所引起的变形，这时候，

就需要考虑桁架所有杆的弯曲。这种分析的结果称为桁架的二次应力。

人们在研究自然界或人造的事物，都需要进行一定的简化，去抓住事物最主要的本质特点，这就是模型化的方法。桁架就是结构力学中最重要的一类模型。

11 刚架结构

在上一篇我们介绍了一种由直杆组成的结构形式，桁架。它的特点是各杆只受拉压力而没有弯曲。现在我们要介绍另一类杆系结构，这类结构也主要是由直杆组成，但是其中的杆都要受弯曲的作用。这就是刚架结构。

刚架结构的主要特点是，杆的交接处不像桁架是铰接而是固接，就是说在结构变形时，几根交接的杆之间的角度不能有变化。

由于刚架结构的这种特点，它不像桁架结构把空间分割为三角形，在构件之间能够留有角较大的活动空间，所以一般厂房、大厅、车、船、居所大多用刚架结构。



图 1 刚架结构

刚架结构的构成材料可以是钢铁、混凝土，也可以是别的材料。图 1

所示的三幅图，中间为单层刚架，左边为钢结构刚架，而右边为混凝土刚架。



图 2 古代的木门框

刚架结构的历史是很久远的，我国从远古的木结构的斗栱连结就是一种近似固接的杆之间的连接。我国古代的门框结构，就是一种典型的刚架结构。像前面介绍的应县木塔，也实际上是一种木刚架结构。

真正刚架结构大发展是钢铁作为结构材料兴起之后，用木材作为刚架结构材料便逐渐退出历史舞台。

由于刚架结构的构造特点，绝大部分刚架结构都是超静定的。而且超静定从次数还比较高。尽管求解超静定结构的力法是 19 世纪末就建立了，但用它来一般地求解刚架结构的内力，还是有许多不方便的地方。由于刚架结构各杆之间都是固接的，要用力法求解刚架结构的内力，就

需要解除许多固接的约束，造成未知量过多，不便于求解，于是人们便想办法针对刚架结构的特点，探求新的方法。

用形变法求解超静定刚架结构是20世纪初最早由本笛克森（Axel Bendixen）在1914年给出的。这种方法是以引进杆件固节点的转角为未知量，对于节点较少的结构，这种方法是很有效的。当这种方法用于求解较多未知量问题时，在二十世纪30年代由克罗斯（Hardy Cross）提出了一种逐次近似的方法，称为松弛法。这个方法在美国很快得到了推广。现在在计算机求解结构问题兴起后，这种方法也只有历史借鉴的意义。在结构力学教科书中已经处于简单介绍的地位了。

2023，10，3

12 “能量”概念是怎样形成的?

在力学与物理学中，“能量”是一个非常重要的概念。因之谈谈这个概念的形成对于深入了解力学与物理学的有关内容也许有一点帮助。

从古希腊阿基米德时代起，人们逐渐了解静力学，对于力的平衡和作用有比较精确的认识。后来人们凭经验发现，一个运动的物体，也有力的作用。例如用力可以把一块石头投到高处，而具有一定速度的石头也可以自己运动到高处；对锥子用力能够刺入木板，而具有一定速度运动的锥子也能够刺入木板。这说明运动的物体具有力的特点，于是人们就把运动物体的这种能力叫做活力（拉丁文 vis viva），把静力学中讨论的力称为死力。

最早精确研究活力的是德国学者莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646－1716），莱布尼兹对活力的研究是从反对笛卡尔的动量开始的。1686 年，他投给《学术学报》（Acta Eruditorum）一篇论文，反对以质量与速度的乘积作为力的度量。莱布尼兹认为，以落体运动来说，物体升起的高度是与初速度的平方成正比，因之作用在物体上的力的效应必定是与其重量所给予的速度平方而不是速度成正比的，这就是机械能守恒的最早的形式。莱布尼兹把物体的质量乘以速度的平方叫做活力。

后来在1669年，惠更斯进行了两个物体弹性碰撞的实验，他在论文《论物体的碰撞运动》中对碰撞问题进行了系统的讨论。他讨论的前提是：惯性定律，碰撞是完全弹性的。在这样的条件下他提出13个命题，得到了一些重要的定律。如：“两个物体相互碰撞时，它们的质量乘其速度平方之和在碰撞前后保持不变。”这个定律正好是莱布尼兹关于活力定律的表述。莱布尼兹的叙述是：“宇宙是一个不与其他物体进行交换的物体系统，所以，宇宙始终保持同样的力。”，莱布尼兹这里的力，是指的活力。后来力学家们一直不休地争论活力死力数十年。最后法国学者达朗贝尔（Jeanle le Rond d'Alembert,1717－1783）于1743年在他的书《论动力学》中指出，整个争端只不过是一场关于用语的无谓争论。他指出，“对于量度一个力来说，用它给予一个受它作用而通过一定距离的物体的活力，或者用它给予受它作用一定时间的物体的动量同样都是合理的。”在这里，达朗贝尔揭示了活力是按作用距离力的量度，而动量是按作用时间力的量度，这个结论是非常确切的。

根据麦克斯韦的意见，最早引进现代意义上的能量概念以取代活力概念的是英国学者托马斯·杨（Thomas Young，1773年-1829年 ）。托马斯·杨不仅在物理学领域领袖群英、名享世界，而且涉猎甚广，力学、数学、光学、声学、语言学、动物学、考古学等等。在14岁以前，他已经掌握10种语言，他对艺术还颇有兴趣，热爱美术，几乎会演奏当时的

所有乐器，并且会制造天文仪器，他还研究了保险经济问题。托马斯·杨擅长骑马，并且会耍杂技走钢丝。所以他被誉为“懂得一切的最后一个人”[1]。

1807 年，托马斯·杨在他的著作《自然哲学讲义》中说：“既然物体垂直上升的高度和它的速度的平方相当，那么不管物体的路径指向任何方向，只要不是向下，所升起的高度也将相当于它的速度的平方。……。**用术语能量来比较严格地表达这一思想，它表征物体上升或在有阻力时穿行距离**。”

他又进一步说：“术语能量可以定义为物体的质量乘以它速度的平方。例如，如果把质量为一盎司的物体每秒运动一英尺为能量一的话，那么质量两盎司速度为每秒三英尺的物体，它的能量为三的平方的二倍，即 18。”

当法国学者科里奥利（Gustave Gaspard Coriolis，1792－1843）引进了功的概念后，即功等于力乘物体在力作用线上的位移，才在前面加上了 1/2，成为 $\frac{1}{2}mv^2$

用现今的语言来说，令 w 为加速度，f 为力，m 为质量，v 为速度，s 为距离，则

牛顿第二定律　　　$mw=f$

是与　　　$\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=f\cdot ds$

等价的，在这里，f 被称为死力，$\frac{1}{2}mv^2$ 被称为活力，即托马斯·杨所说的能量[2]。

至此，力学上的能量才最后定型，混乱了一个多世纪的活力死力才得以澄清，将力与能量区分开来。

最后，我们需要做两点附记：

一是，能量概念发展中的两位关键人物，莱布尼兹与托马斯·杨都是全才型的学者。控制论的开创者维纳曾经说莱布尼兹是最后一个什么都懂的人[3]。

二是，能量一直是对运动物体的做功能力而言的，因为它是质量与速度的平方乘积，所以永远是正的，不言而喻，静止的物体能量为零。后来爱因斯坦推广能量的概念，说物体静止时也具有能量 $E=mc^2$，这里 m 是质量 c 是光速，也永远是正量。有人说，势能是可以有负值的，其实势能还不能认为就是能量，英文名字是 potential energy，意思是可能的能量，还不就是能量。现在社会上人们都爱把一种促进好事情的意见说成是正能量，促退的说是负能量，这是对能量一词的错误借用。是一种不懂力学又装懂，而想借用力学术语的表现。这种说法能够广泛流传，实在是当今社会上不认真、浮躁、想当然、不求甚解学风的一种表现。



图 1 莱布尼兹像



图 2 托马斯·杨像

参考文献

[1] [Andrew Robinson, The last man who knew everything, Andrew Robinson,2006

[2] 武际可，力学史，上海辞书出版社，2010

[3] N. 维纳，郝季仁译，控制论——关于在动物和机器中控制和通讯的科学 1948，科学出版社，2009

13 势能、势能原理和能量法

关于这个题目，有许多教科书，也有不少科普文章讲到。为什么还要在这里啰嗦呢。理由有两点。一是一些教科书上讲势能的讲法上有点含糊，他们将总势能定义为变形能减去外力做的功，这样的说法是不准确的，需要更正。因为势能与功是不同的概念。其次，为了用比较简明的方式介绍近年来快速发展的有限单元法与能量计算有关，所以需要多说几句，既然要谈论结构，结构分析是躲不开的，而有限单元法更是不可绕开的论题。

§1 势能

在法拉第（Michael Faraday，1791— 1867）之前，人们考虑一个质点受力时总是把眼光放在质点所在的位置。法拉第引进了场的概念，人们认识了力场，力场充满空间，是空间点的函数，质点放在哪里，质点就受那个位置的场力作用。力场最好的例子就是重力场、引力场。

设有质点在在力场从 A 点移动到 B 点，质点所受的力为 $\boldsymbol{f}$ ，则我们定义从 A 点到 B 点场的势能改变量为

$$\Delta U = -\int_A^B \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{u} \qquad (1)$$

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 是位移的微分。它的意义是场对外做了功 $\int_{A}^{B} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}$，场自己的能量就会减少这样多，所以前面要加一个负号。

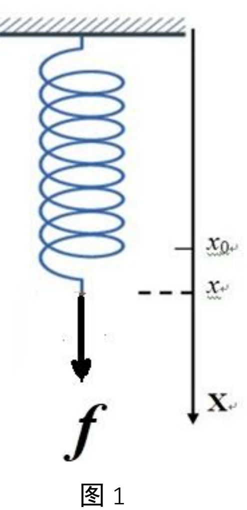


图 1

如果我们定义 A 点的势能为零，那么我们场的势能就可以直接写为

$$U = -\int_{A}^{B} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad (2)$$

这里 U 表示 B 点的势能。

我们这样定义势能时，有一个先决条件，就是积分（1）与路径无关，也就是无论走怎样的路径，只要是从 A 点积分到 B 点，它的结果都是一样的。一般情况下，我们遇到的场，都是满足这个条件的。

现在我们考虑如图 1 的弹簧，当弹簧由外力 $\boldsymbol{f}$ 簧拉长时，弹簧给出一个与外力反向的力

$-\boldsymbol{f}$，我们可以把弹簧下端加力点上下的直线看作弹簧所形成的力场，无论弹簧伸长还是压缩，弹簧都会给出一个力。由于这个力与弹簧加力端的位移成比例而且与加力端的位移方向相反即

$$f = -kx \qquad (3)$$

这里 k 是一个常数。于是这个弹簧所形成的势能是

$$\mathrm{V} = -\int_0^x f \cdot \mathrm{d}u = \int_0^x kx^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4}$$

上面我们讨论了简单情形下的势能，只有一个力场。后面弹簧的势能也成为变形能。

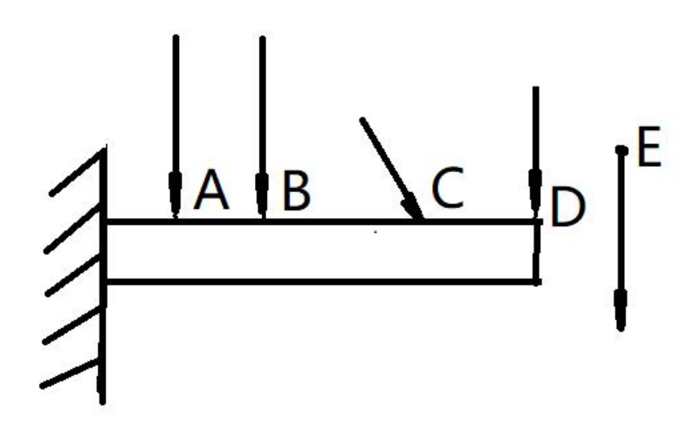


图 2

对于比较复杂情况下的势能，我们首先看图 2，它是一个力系。左边在一根悬臂梁上的 A、B、C、D 四点各作用一个力，右边 E 质点受一个重力作用。我们知道重力是在空间均匀的，作用在悬臂梁上的四个力，我们可以设想在四个力的作用点的邻域也有一个均匀的力场，在每一点的

大小和方向都一样。这样假设是合理的，因为当悬臂梁变形时四个点也都只有很小的位移，而且力的大小方向变化可以忽略。由此，我们可以假设一般系统有 *n* 个力 $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2, \cdots$，$\boldsymbol{f}_n$ 所形成的力场而且都是均匀的，同时对应的位移是，$u_1, u_2, \ldots, u_\mathrm{n}$ 所以这些力场的势能就是每个力场势能的总和，即

$$\mathrm{U} = -\sum_{1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \qquad (5)$$

如果力系在作用点邻域不是常量，而是随位移有变化，势能就需要按照位移来积分，即

$$\mathrm{U} = -\sum_{1}^{n} \int_0^{u_i} \boldsymbol{f}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}_i \qquad (6)$$

如果我们的力学系统中还有分布的力，如图 3，我们仍然可以设想在梁的临近有无穷多力场，对应每一个 x 都有一个均匀的力场，如果梁上的 x 点的位移与 $f(x)$的方向一致为 u（x），则这些力场所形成的势能应当是

$$\mathrm{U} = -\int_0^{\mathrm{L}} f(x)u(x)\mathrm{d}x \qquad (7)$$

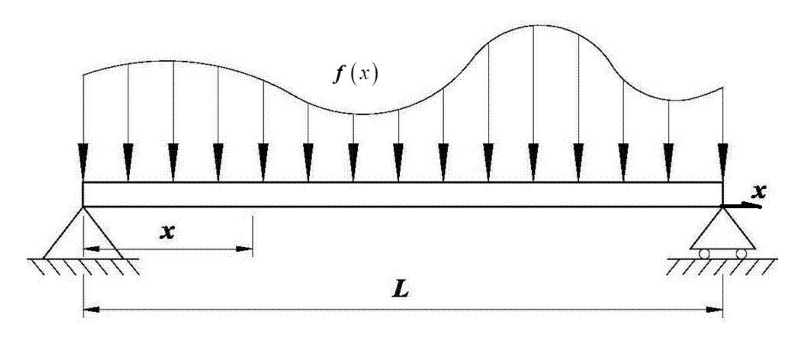


图 3

注意，（7）和以前的势能表达式有很大的不同，前面的表达式是势能依赖于若干个场力和位移变量变化，如（5）式这样的变量有 2n 个，而（7）式的势能是依赖于 f 和 u 两个 x 的函数。这种依赖于函数而变化的变量，称为泛函。所以在一般情况下，势能可以是多变量的函数，也可以是泛函，而且泛函的自变函数也可以是多元函数。

对于一般结构，都可以近似认为是弹性体，类似于弹簧的势能，也可以推广到连续的弹性体上。它的弹性能和变形能也是泛函，自变函数是表征变形或位移的函数。在材料力学中，我们学过，一根梁的变形能的表达式是

$$V=\frac{1}{2}EJ\int_0^L\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2dx \qquad (8)$$

这里 E 是材料的弹性模量 J 是梁截面的转动惯量 w 是梁的挠度 L 是梁长 x 是梁轴的坐标。

同样，由弹性理论，可列出任何弹性结构构件的变形能的表达式。由此我们就能够列出任何复杂结构整体的变形能的表达式。

§2 最小势能原理

在仔细讨论了各种不同情况下力学系统的势能表达式后，我转而来介绍力学中一个重要的原理。这就是最小势能原理。为此我们简单回顾一下这个原理的发展。

原理的萌芽应当是从伽利略的学生托里拆利开始。托里拆利在 1644 年出版的著作《论自然落体的运动》中有《几何结果》一篇，他系统介绍了伽利略关于落体的研究。虽然这是一篇阐述动力学的著作，其中也有不少关于静力学的重要见解。其中提到："彼此连在一起不能单独运动的两个重物，它们的重心不下落。事实上，当两个重物彼此拉住（不管用杠杆还是滑轮或者别的机械联系）好像是由两个部分组成的一个重物，不过这个重物不发生重心不下落的运动。当重物的重心不再下落时，显然它居留在同一位置。"意思是说，在重力场中，由两个连在一起的重物，当重心达到最低点时，系统就平衡了。这种表述称为托里拆利原理的第一表述。之后他还给出了另一表述："如果物体重心可以沿一个球运动，而且将重心提离球的最低点，则物体不可能保持静止。"这一表述是关于平衡稳定性的最原始的形式。

1787 年，拉格朗日出版了他的巨著《分析力学》，在讨论分析静力学时，他从虚功原理出发，认为一个由 n 个力 $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2, \cdots$, $\boldsymbol{f}_n$ 的系统的平衡条件是

$$\mathrm{d}\Pi = \sum_{1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}_i = 0 \qquad (9)$$

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i$ 是系统的约束所允许的任意可能位移。拉格朗日接着提出问题说，如果（9）是一个全微分，那么就可以把（9）式积分，得到 Π 。我们对比拉格朗日得到的 Π ，与势能的积分表达式（6），就会发现，其间只差一个负号，拉格朗日说，当 Π 取极大极小值时，系统处于平衡状态。也就是说，当势能取极大极小时系统处于平衡状态。在拉格朗日所处的时代，人们还没有势能的概念。所以拉格朗日所用的力函数 Π ，实际上就是后来势能的反号。

用现在的语言准确地说，**当系统的势能取极小值时，系统处于稳定平衡状态。这就是最小势能原理，有时也简称势能原理。**

现在让我们来看一看最小势能原理是怎样在静力学中起作用的。

在重力场中，水面总是平的，这是为什么这是因为只有水面保持水平，它的重心才最低，亦即势能最小。试想将已经成为水平的水面，在一处挖一块堆在另外一处的水平面上，这时整个系统无疑重心提高了，就不会保持平衡了。

设有许多物体和质点组成的一个力学系统，你只要把它们在重力场中的势能写出来，并且把它们的重心写出来比较一下，就会看出重心最低正好就是势能最小！

这就是为什么在选矿时，总是利用不同成分的比重不同。重的金子总是在最底下。吹尽狂沙始见金。

在引力场作用下，天体总是成球形，也是这样能够使场的总势能最小。

现在让我们来看看通过势能原理怎样得到力学系统的平衡条件。

如图 1 的弹簧，设在弹簧的下端悬挂一个质量为 *m* 的重物，问弹簧伸长多少?

首先写出弹簧与重物的总势能为

$$\mathrm{U}=\frac{1}{2}kx^2-mgx$$

我们知道，势能最小的必要条件是，

$$\mathrm{dU}=(kx-mg)\mathrm{d}x=0$$

由于 dx 总不为零，所以有平衡方程

$$kx-mg=0$$

由此可以得到　弹簧的伸长为　　$x=\dfrac{1}{k}mg$ 。

如图 3 受分布荷载 $f(x)$的梁，搁置在分布的弹性基础上，把变形能、

地基的弹性能和载荷的势能加起来得到总势能为

$$\Pi=\int_0^L[\frac{1}{2}EJ(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2})+\frac{1}{2}kw^2-f(x)w]\mathrm{d}x \tag{10}$$

因为Π是一个梁的挠度 w（x）的泛函，我们看当对 w（x）做微小的扰动时，泛函Π是怎样变化的，令 w（x）得到一个微小扰动$\alpha\eta(x)$，这里α是一个很小的正数，$\eta(x)$是任意一个连续可微的函数。这时我们得到

$$\Pi(w(x)+\alpha\eta(x))=\int_0^L[\frac{1}{2}EJ(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+\alpha\frac{d^2\eta}{d\eta^2})^2+\frac{1}{2}k(w+\alpha\eta)^2-f(x)(w+\alpha\eta)]\mathrm{d}x$$

把积分号下两个平方括号展开，由于微小性，略去α的二次项，就得到

$$\Pi(w(x)+\alpha\eta(x))\doteq\int_0^L[\frac{1}{2}EJ(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2})^2+EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\alpha\frac{d^2\eta}{d\eta^2}+\frac{1}{2}kw^2+kw\alpha\eta-f(x)(w+\alpha\eta)]\mathrm{d}x$$

总势能处于最小状态时，对自变函数的任何微小扰动，总势能的改变量都应当是零，于是我们应当有

$$\begin{aligned}\Pi(w(x)+\alpha\eta(x))-\Pi(w(x))&\doteq\int_0^L[EJ\alpha\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\frac{d^2\eta}{d\eta^2}++kw\alpha\eta-f(x)(\alpha\eta)]\mathrm{d}x\\&=EJ\alpha\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\frac{d\eta}{d\eta}\Big|_0^L-EJ\alpha\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\eta\Big|_0^L+\int_0^L[EJ\alpha\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}++kw-f(x)](\alpha\eta)\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

最后一式中前两项是对被积的第一项做分部积分得到的。由于$\alpha\eta$的任意性，所以我们得到梁的平衡微分方程

$$EJ\alpha\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}+kw-f(x)=0 \tag{11}$$

以及相应的两端给定的四个边条件。要么给定端点 w 或 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$，此时相应的 η 或 $\frac{d\eta}{d\eta}$ 值应为零，要么给定端点的弯矩或剪力，即对应的 $\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}$，此时相应的 $\frac{d\eta}{d\eta}$ 或 η 也应当为零。就是说我们从势能极小可以得到梁的平衡方程与相应的边界条件。

从势能极小的条件不仅能够得到梁和简单弹簧的平衡条件，也能够得到任意复杂的结构的平衡条件。

§3 能量法

上面我们看到，利用能量原理，能够得到结构受力后精确的平衡条件。不过对于复杂的结构，要准确求解这些平衡条件是十分困难的。这里我们要介绍的是利用能量原理还能够对于力学系统平衡进行近似求解，这种方法就是能量法。

能量法最早由英国物理学家瑞利（Third Baron Rayleigh，1842—1919 用于计算弹性体平衡位置附件的小振动。后来由出生于瑞士后移居德国学者里茨（Ritz, Walter, 1878 — 1909)，应征 1904 年科学院悬赏，在解决四边夹住边条件矩形板的弯曲问题中发展的（他虽然没有获得奖赏，但所发展的方法为后人认可）。后人称为瑞利-里茨法。

下面我们就以式（10）所表示的弹性地基上的梁的总势能来给出能量法最简要的说明。

我们的目的是要寻找能够使总势能（10）最小的梁的挠度函数 $w(x)$，我们知道，要求准确的解是非常困难的，因之可以用求解一个能够使（10）近似最小的 $w(x)$ 也就可以了，它也是实际上可以使用的近似解。为此我们把近似解表为

$$w(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x) \tag{12}$$

这里 $\varphi_i(x)$，（$i=1,2,\cdots，n$），是给定的一组定义在[0,L]上的满足位移端条件的函数，a_i，（$i=1,2,\cdots，n$），是待求的常数。

将（12）代入（10），经过整理，我们就得到总势能的矩阵表达式

$$\Pi(\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}K\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-F\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

这里 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$，$K=(k_{ij})$，$\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，

其中

$$k_{ij}=EJ\int_0^L\frac{\mathrm{d}^2\varphi_i(x)}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{j}}(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x+k\int_0^L\varphi_i(x)\varphi_{\mathrm{j}}(x)\mathrm{d}x \quad (i，j=1,2,\cdots,n)$$

$$f_i = \int_0^L f(x)\varphi_i \mathrm{d}x, \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

我们看到在近似式（12）的条件下，梁的近似总势能（13）的表示式是一个 n 个未知量的多元函数。我们又知道，多元函数 $\Pi(\boldsymbol{a})$ 取极值的必要条件是它对于每一元的偏导数为零，亦即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

对于（13）求偏导数就得到如下的关于 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的线性代数方程组

$$K\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - F = 0 \qquad (14)$$

于是，我们的问题就归结为求解（14），得到 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 后代入（12）就得到我们要求的挠度近似解。只要 $\varphi_i(x)$, $(i=1, 2, ..., n)$，这组函数选得好，而且 n 适当大，一般都可以达到所需要的精确度。

能量法的原则大抵就是这样，并不复杂。不过，后来的发展特别是随着电子计算机的发展，能量法也有许多新的进展。为此，需要做以下几点注记：

1），公式（12）所引进的那一组函数称为求解问题的基函数，它的选取对于方法的有效性影响很大。选好了，只要少数几个就能够达到很好的效果。如果选三角函数，则近似式就是典型的通常的傅里叶展开。

2），如果把未知函数的定义域划分为不同区段，每一区段采用单用于它的插值公式，区段外取零值来定义对应于不同区段的基函数对于板壳和三维弹性体基函数就要相应地取二维或三维的插值函数。这就是上世纪六十年代之后快速发展起来的有限单元法。并且形成相当规模的通用或专用的结构计算软件产业。使用这些软件，在计算机的帮助下，一般整条轮船，整架飞机的结构，具有百万数量级未知量的复杂结构都能够一次求解，达到所要求的精度。

3），俄国著名的工程师伽辽金（Boris Galerkin，1871-1945）发展了一种不从能量出发，而是将近似表达式（12）直接代入方程（11）乘以基函数然后积分。得到的方程组和（14）是类似的。后人称为伽辽金法。伽辽金法对于那些不存在总势能的力学系统来说，可以直接从系统的微分方程组来求解。对于存在总势能的系统来说，结果是一样的。

14 动力学的极值原理与结构的振动

前面我们对静力学讨论了势能的极值原理。现在我们要问，对于动力学有没有相应的极值原理呢？有的，我们就来讨论这个问题。

在进入正题之前，我们先来介绍一下广义坐标或拉格朗日坐标。凡是能够准确确定力学系统状态的一组参数都可以称为系统的广义坐标。遵照拉格朗日，对于一个 n 自由度系统我们用

$$q_1, q_2, \cdots, q_n$$

来表示。对于一个连续系统弹性体或流体，如随时间变化的梁的挠度

$$w(x,t)$$

我们可以用类似于在上一章（势能）势能原理和能量法）的式（10），把随时间变化的梁的挠度表为近似表达式

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\varphi_i(x) \tag{1}$$

这里

$$q_i(t)\left(i=1,2,\cdots,n\right),$$

也可以称为广义坐标，因为它们也能够近似地确定力学系统的状态。

现在我们假定我们把给定的力学系统已经引进了广义坐标。在广义坐标中我们有系统的总势能 V 和系统的动能 T。，在一般情况下它们是

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

$$T = T(q_1, q_2, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, q_2, \cdots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

这里上面的点表示对时间的微分。

我们知道，对于保守系统，系统的总能量是守恒的。动能与势能的和是常量。所以讨论

$$T+V$$

的极值是没有意义的。既然势能 V 有极大值那么它的负号，即—V 就会取极小值，而 T 也会同时取极小值。所以我们可以来讨论 T—V 的极值问题。为此我们给

$$q_i(t)，（i = 1, 2, \cdots, n)$$

一个任意的微小的扰动

$$\alpha\eta_i(t),$$

α 是一个正小数。考虑扰动后的 T—V 应当是

$$T-V=T(q_1+\alpha\eta_1(t),\cdots,q_n+\alpha\eta_n(t);\dot{q}_1+\alpha\dot{\eta}_1(t),\cdots,\dot{q}_n+\alpha\dot{\eta}_n(t))-V(q_1+\alpha\eta_1(t),\cdots,q_n+\alpha\eta_n(t))$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(q_1+\alpha\eta_1(t),\cdots,q_n+\alpha\eta_n(t))(\dot{q}_i+\alpha\dot{\eta}_i(t))(\dot{q}_j+\alpha\dot{\eta}_j(t))-V(q_1+\alpha\eta_1(t),\cdots,q_n+\alpha\eta_n(t))$$

在极值处，这个式子减去没有扰动的值应当为零，亦即应当有

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\alpha\dot{\eta}_i(t)+\frac{\partial T}{\partial q_i}\alpha\eta_i(t)-\frac{\partial V}{\partial q_i}\alpha\eta_i(t)=0，\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

（2）

上面这个式子，只是对某个时刻 t 取极值的条件，实际上，我们需要在一个时间区间 $[0,t]$ 上都取极值的条件。为此上式需要在这个区间积分成立，即

$$\int_0^{\mathrm{t}}[\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\alpha\dot{\eta}_i(t)+\frac{\partial T}{\partial q_i}\alpha\eta_i(t)-\frac{\partial V}{\partial q_i}\alpha\eta_i(t)]\mathrm{d}t=0，\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

由于被积函数的第一项

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\alpha\dot{\eta}_i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\alpha\eta_i(t))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i})\alpha\eta_i(t)$$

代入，并对第一项积分就得到

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\alpha\eta_i(t))\Big|_0^{\mathrm{t}}-\int_0^{\mathrm{t}}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}]\alpha\eta_i(t)\mathrm{d}t=0，\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

由于对于任意的

$$\alpha\eta(t)$$

都要成立，所以其中方括号内的部分必须为零，即我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

这就是力学系统的拉格朗日方程。后来泊松引进 L=T—V，称为拉格朗日函数，把上式写为更简洁的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

当场力为零时，即当 V 为零时系统的拉格朗日方程就退化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

这时若把动能

$$T=\sum_{ij=1}^{n} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

中的 g_{ij} 看作黎曼空间的度量系数，则运动方程就相当于黎曼空间中的短程线或测地线的方程。实际上，当黎曼空间退化为欧氏空间时，即当 g_{ij} 为当 ij 相同时为 1，不同时为 0。这个运动方程的解就是 n 维空间中的直

线。

方程（3）当动能 T 为零时就退化为我们上一节讨论过的平衡问题的极值情形。

这组方程是对于一般保守力学系统的，对于我们通常遇到的结构来说，由于它们运动的幅度不大，一般是在平衡位置附近做小振动。所以可以适当的简化。

设系统的平衡位置是

$$(q_1^0, q_2^0, \cdots, q_n^0) = (0, 0.\cdots, 0),$$

而且设在这一点势能为零，即

$$V(0, 0, \cdots, 0) = 0。$$

由于在这一点系统是处于稳定平衡的，所以这点势能取极小值。于是势能在这点临近可以表为冠以坐标的二次函数。对它的偏微商就是一次函数，即

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

系统的动能在平衡点邻近，其系数可以近似取平衡点的值，即

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(0, 0, \cdots 0)\dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

g_{ij} 是常数。把 V 与 T 的近似式代入（3），并且写为矩阵形式，我们就得到系统在平衡位置邻近的振动方程

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \tag{4}$$

这里

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix},$$

$$q = (q_1, q_2, \cdots q_n)^T,$$

M 称为质量矩阵，K 称为刚度矩阵。

一些结构受外来有一定频率干扰力作用时，必须考虑结构自身的固有频率，例如有机械工作的厂房、还例如对建筑的抗震设计，都必须考虑结构的固有频率。这时问题就归结于求解（4）的特征值问题。

一般的结构可以看作保守系统，但有些结构，例如要考虑结构材料的内耗、连接处的阻尼等因素，又是在方程（4）中还要增加考虑阻尼的项，把方程写为

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0 \tag{5}$$

这里 C 称为阻尼矩阵。

对于通常的结构来说，考虑它的振动响应时，计算由（5）确定的方程未知量的时间历程响应就大致能够满足工程需要了。不过，尽管（5）是简化了的方程，但由于结构的复杂性，计算量仍然是可观的。

15 计算力学的形成与发展

§1 计算机的发明对力学的推动

人类研究计算工具有很久的历史，从算筹、算盘、手摇计算机、电动计算机，已经有几千年了。1945 年在美国诞生的电子计算机既是计算工具的革命，又是牵动整个科学技术的大革命。

最早的电子计算机的设计方案是莫希利（J.W.Mauchly,1907－1980）提出的。第二次世界大战中，莫希利当时在宾夕法尼亚大学电工系同在附近的一所美国陆军弹道研究所共同负责一项任务，这项任务要求每天为海军计算数以千计的弹道。弹道计算是一个典型的力学课题，每条弹道以飞行 60 秒计，用当时的台式计算机，一个熟练的计算员要花 20 小时。用当时的大型模拟机也需要 15 分钟。即使雇用 200 人计算，两个月也不一定能完成大炮一天打炮的任务。莫希利为了解决这一困难，于 1942 年 8 月提出了题为《高速电子管计算装置的使用》的报告。这个报告 1943 年得到批准，估算投资为 15 万美元，所造的机器名为“电子数值积分计算机”，简称 ENIAC(Electronic Numerical Integrator and Computer)，于 1943 年 6 月开工。

研制小组的总工程师埃克特（J.P.Eckert,1919－1995）是一位硕士，年仅 24 岁。莫希利本人也只有 36 岁。1945 年底，ENIAC 宣告竣工，共

耗资48万美元。1946年2月15日举行投产典礼，起初是专门用于计算弹道，后来又经过多次改进而成为通用计算机。

计算机一旦来到世界上，便受到人们的热情关注与不断改进。先后经过了四次换代：从1945年到1958年以电子管来制造计算机为第一代，从1959年到1963年以晶体管来制造计算机为第二代，从1964年到20世纪70年代初以集成电路来制造计算机为第三代，从20世纪70年代以后用大规模集成电路制造巨型计算机为第四代。特别是，从20世纪70年代中开始的微处理机，使计算机的性能大大提高，并且由于价格便宜使计算机大为普及。据有人统计，从1945年第一台计算机诞生起，每18个月计算机的性能提高一倍、价格降低一半。

自有史以来人类发明的各种工具，都是延长人的器官，如望远镜、显微镜是延长人的眼。而计算机则是延长人的脑。所以人们又把计算机称为“电脑”。计算机从它的原理、设计、制造与应用已经形成了一个新的庞大的学科群，这就是计算机科学。

在20世纪初，英国著名的力学家乐甫在他的名著《数学弹性理论》一开头，总结力学发展的规律时说：定理越来越少，计算越来越繁。意思是说一些有比较狭义意义的定理被一些更广泛意义的定理所包含，而计算公式越来越复杂。因而力学研究极大的困难在于计算太慢。计算工具太慢就成为力学研究与发展的瓶颈。美国人发明电子计算机的初衷也

正是为了解决计算弹道这个典型复杂的力学问题开始的。计算机的产生使力学学科发生了巨大变化。结构分析、弹道计算、空气动力计算、数值天气预报、渗流与地下水的运动规律、天体力学中的轨道计算等等越来越多、越复杂的问题都可以交给计算机计算了。

计算机产生后，力学学科的研究手段，从只有理论、实验，增加为理论、实验与计算三种手段。计算机的强大威力淘汰了一些不适应计算机的过时方法，适应计算机的特点发展了新的计算方法，在计算机的帮助下发现了许多新现象，如奇怪吸引子与混沌就是在计算机的帮助下发现的。

计算力学这一名词的出现大约是 20 世纪 50 年代末的事情。它是研究借助计算机求解力学问题、探索力学规律、处理力学数据的新学科。计算力学又是力学、数学、计算机科学的交叉学科。

§2　有限元法的提出与普及

在计算机发明后的早期，用计算机求解力学问题或别的问题仅仅利用了计算机快这一优点。紧接着而来的问题是程序工作量不能适应计算机的高速度。一台计算机需要数以百计的工作人员编程序才能喂饱。于是编写程序又成了合理使用计算机的瓶颈。人们想出了许多方法去解决这一困难。从 20 世纪 50 年代先后出现的符号汇编语言、FORTRAN 语言、

ALGOL 语言等以及随之而迅速发展起来的软件产业，就是为解决这一问题应运而生的。

在适应于计算机求解力学问题节约程序人力方面，最成功的就是有限元方法的产生与发展。它的产生也是计算力学作为力学一个独立的分支学科形成的标志。

有限元法的思想尽管可以追溯得更早，如有人说有限元的思想是 20 世纪 40 年代美国人库朗（R. Courant）在 1943 年提出来的，有人说有限元是加拿大人辛格（J.L. Synge）在 40 年代提出来的，更有人说有限元是欧拉的折线法就包含的，还有人说在东汉刘徽的割圆术就是有限元法，不一而足。当然这些说法也不是完全没有道理。因为有限元法的思想的确是有一部分同上述人的工作有点联系。但是要知道，有限元法是同计算机紧紧相联系的。

事实是，在 20 世纪 50 年代中期世界各国都有一批人在思考用计算机求解结构力学与连续介质力学问题。如曾经在英、德工作过的希腊人阿吉里斯（J.H. Argyris）1956 年、美国的特纳（M.J. Turner）、克拉夫（R.W. Clough）与马丁（H.C. Mardin）在 1956 年、苏联的符拉索夫（B.З.Власов）在 20 世纪 50 年代、中国的冯康在 60 年代初都提出了帽子函数插值或单元刚度的矩阵表示。所以很难说有限元的思想是哪一个人的发明，它是一种世界性思潮的产物。

有限元法的重要性并不首先在于它的插值方案，而首先在于它的计算机软件实现。在它之前，人们算一个题就需要编一个程序，而有限元的软件实现，使一大批力学问题的计算只需要准备必要的数据而无需再编程序。所以它在计算机的应用上，具有革命性的意义。

在有限元法的发展历史上的重要事件是，20世纪50年代末加里福尼亚大学伯克利分校的威耳孙（E.L. Wilson）在克劳夫指导下的博士论文《二维结构的有限元分析》，该论文于1963年完成了世界上第一个解决平面弹性力学问题的通用程序。这个程序的主旨是借助于它解算任何平面弹性力学问题不需再编程序了，只要按说明输入必要的描述问题的几何、材料、荷载数据，机器就可以进行计算，并且按照要求输出计算结果。有限元法的程序一经投产，立刻显出它的无比优越性，原来在弹性力学领域内对付平面问题，只有复变函数方法与平面光弹性方法两手，这两种方法在有限元法的对比下便渐渐退出了历史舞台。威耳孙在有限元程序系统方面后来还进行过许多有意义的研究，他编写了有限元的多种单元的程序SAP（Structural Analysis Program），在他的指导下，他的研究生编写了非线性结构分析程序NONSAP，1981年他还最早编写了适应微处理机的程序SAP81。SAP程序经曲圣年、邓成光、吴良芝等移植与修正、SAP81程序经袁明武扩充改造形成独立的版本SAP84，这两个程序在我国工程建设中发挥了重大作用。NONSAP经过美国巴特（Bathe）的

改进形成有世界影响的非线性分析程序 ADINA。

随后，结构分析的有限元软件迅速发展。包含二维元、三维元、梁单元、杆单元、板单元、壳单元、流体单元等多种单元、能解决弹性、塑性、流变、流体以及温度场、电磁场各种复杂耦合问题的软件以及软件系统不断出现。在 10 多年内生产与销售有限元软件形成了有相当规模的社会新产业，而且使用有限元法解决实际问题迅速在工程技术部门普及。

1960 年克劳夫在匹兹堡举行的美国土木学会电子计算会议上的《平面应力分析中的有限元法》是最早提到有限元的论文。之后有限元的论文、文集、专著大量涌现，专题学术会议不断召开。新的单元、新的求解器不断提出，先后有等参元、高次元、不协调元、拟协调元、杂交元、样条元、边界元、罚单元等不同的单元，有带宽与变带宽消去法、超矩阵法、波前法、子结构法、子空间迭代法等求解方法，还有网格自动剖分等前后处理的研究，这些工作大大加强了有限元法的解题能力，使有限元方法逐渐趋于成熟。1988 年出版的《有限元法手册》是有限元法发展的一个阶段总结。[1]

§3 非线性计算力学

[1] H.卡德斯图赛著，诸德超等译，《有限元法手册》，科学出版社，1996 年

计算力学的迅速发展，以及为他所取得的成功所鼓舞，使得一些学者对于计算力学的成就产生了过分乐观的估计。例如在 40 年前美国就有人说，再过 10 年风洞就要被计算机代替，40 年过去了，计算机还不能取代任何风洞。计算力学所取得的成就，大体上说，对于可以用线性理论来近似的那些问题，靠计算机大部可以较好地解决了，可是对于实质上是非线性的那种力学问题，目前计算机几乎还是无能为力的。

钱学森先生说，力学“是一门用计算机计算去回答一切宏观的实际科学技术问题，计算方法非常重要；另一个辅助手段是巧妙的实验。”[2]如果说，目前在宏观力学问题中线性问题有百分之九十的可以依靠计算机来求解，百分之十靠实验求解，那么在非线性领域内，情形正好反过来。所以自从计算力学这个学科产生以来，它努力的方向就有两个方面。一方面对于线性问题，主要是扩大它求解问题的规模；另一方面，对于非线性问题来说，在努力寻求计算方法。近年来非线性问题的求解已经成为计算力学学科发展的主攻方向了。现在看来钱学森先生的看法对于宏观问题中的线性问题，已经是一种现实，而对于宏观问题中的非线性问题，这只能当作计算力学这一学科的努力方向，我们还必须准备走很长的路。

从 20 世纪 60 年代开始，在结构分析的有限元程序中，逐渐计入非

[2]钱学森，《我对今日力学的认识》，载中国力学学会主编，《 力学，迎接 21 世纪新的挑战》，北京理工大学出版社，1997 年，第 41 页

线性项。例如讨论结构材料的塑性性质的，称为物理非线性问题，讨论结构的大变形引起的修正，称为几何非线性问题。最初的计算方案都是采用荷载增量法，即逐步给荷载一个小的增量，求相应的变形增量。大约从20世纪60年代末，人们在实际解题中发现有的问题在荷载达到极大值时计算机总是溢出而停机。这个问题困惑了人们许多年，直到20世纪70年代末80年代初才解决。1971年美国学者温泊纳（G.A. Wempner）、1978年荷兰学者瑞克斯（E. Riks）分别从理论上提出解决这个问题的方法，20世纪80年代初人们在程序上实现了这个方法。这个方法后来被称为弧长法。

结构的优化设计是计算力学中一个重要的非线性研究领域，它的主要目的是在满足一系列条件下（这些条件也被称为约束）寻求结构最优参数。通常这类问题是非线性的，而且计算量非常大，只有靠计算机的帮助才能解决。在钱令希（1916－2009）教授的大力提倡、组织与推动下，大连理工大学的程耿东、钟万勰得到了一些重要结果，结构优化的研究在我国有很好的发展。

求解非线性问题紧接着而来的是遇到分叉的问题。在有限元的通用程序中，对于结构稳定性的问题，通常是将问题化归于一个特征值问题，它的基础还是线性理论。在用非线性程序来求解时，往往由于遇到分叉而不能前进。这是因为在分叉点结构的总体刚度矩阵退化问题无法继续

求解。为了克服这一困难，对于高维系统中的平衡解的静分叉以及霍普夫分叉，人们又发展了一系列的方法，但是在实践上还不能说已经彻底解决了。这方面的总结可参阅武际可与苏先樾著的《弹性系统的稳定性》一书（科学出版社，1994 年）和武际可与黄克服著的《分岔问题及其计算方法》（北京理工大学出版社，2019 年）。关于高维系统的同宿轨道与异宿轨道的计算，以及高维系统向混沌转化的计算，迄今仍是难题。

附记：国内有限单元法应用与推广的一些早期重要事件

1964 年夏，中国科学院计算研究所三室承担的刘家峡水坝应力分析得到满意的结果，计算中采用了差分变分法。

1965 年中国科学院计算研究所冯康在《应用数学与计算数学》上发表《基于变分原理的差分格式》，最早给出有限单元法求解平面二阶椭圆型方程问题收敛性的证明。

1972 年北京大学曲圣年在国产 108 机上用汇编程序编制了求解弹性力学平面问题的有限元通用程序，命名为 BD 程序，这是国内自编的第一

个用有限元方法计算工程问题的通用程序。

1973 年武际可王大钧等编制了用有限单元法求解弹性旋转薄壳的静力分析程序 BS 和动力分析程序 BSD。这两个程序解决了当时电力系统大型冷却塔应力分析问题。为此获 1988 年国家教委科技进步二等奖和国家科技进步三等奖。

1973 年-1975 年，北京大学的曲圣年用汇编语言编制的含 20 节点的三维求解弹性力学问题的 YD 程序。1975 年曲圣年与殷有泉用 YD 程序与 BD 程序指导大学生对碧口水坝进行了计算。

1974 年 河海大学（原华东水利学院）徐芝纶编写并由水利电力出版社出版中国第一部系统讲述有限单元法的专著《弹性力学问题的有限单元法》。

1975年大连工学院的钟万勰编制有限元法分析程序JIGFIX投入使用，以后多次补充改进形成新的版本，以适应海洋平台、高层建筑、结构优化、抗震等多方面的需要。

1979年开始，北京大学曲圣年、邓成光、吴良芝等，对美国加利福尼亚州立大学伯克利分校威尔逊开发的结构分析SAP系列进行了消化、移植和推广工作。先后经过近20年的工作，举办培训班多期，为数以百计的重要工程解决了计算与应力分析问题。该项目获1985年国家科技进步二等奖。

1979年，飞机结构强度研究所的冯钟越主持编制的航空结构分析系统（HAJIFI）通过鉴定它是航空静力结构分析应用软件系统。后来1981年结构分析II型（HAJIFII）是用于动力分析的软件系统，投入应用。1985年结构分析系统III型（HAJIFIII）用于非线性分析，通过鉴定投入使用。这些软件获1985年国家科技进步二等奖。

1984年北京大学袁明武将加利福尼亚州立大学伯克利分校威尔逊开发的在微机上运行的结构分析通用程序SAP81扩充改进为SAP84，为国内大量工程计算应用。它是国内结构分析首个微机版程序。

1988年，中国建筑科学院推出专门用于建筑结构分析的软件PKPM，这个软件是继承该院从1970年代开始编制结构分析程序，不断积累与改进的结果。

16 混凝土与钢筋混凝土

现今大型的结构，多采用混凝土，大高楼、大坝、大桥梁。混凝土可以说是使用最多的结构材料。其所以如此，是由于混凝土具有独到的优点:原料丰富、易生产、施工简单、强度高、耐久。

混凝土施工其实是由沙子和石头等称为填料的材料和水泥混合后加水搅和均匀，用模板或其他方式赋予要求的形状，经过适当的时间固化后就成为混凝土结构。

而水泥生产，则以自然界大量存在的石灰石和粘土为主要原料，经破碎、配料、磨细制成生料，在水泥窑中煅烧成熟料，再加入适量石膏（有时还掺加混合材料或外加剂）磨细而成。如今全世界生产水泥的碳排放量已经占到 3-5%，可见它的用量之大。水泥的英文是 cement，由拉丁文 caementum 发展而来的。

在仔细讨论混凝土之前，我们先介绍中国古代有一种类似混凝土的材料，俗称三合土。三合土是由石灰、黏土（或碎砖、碎石）和细砂所组成。

三合土在我国有很长的历史，在明清两代已经广泛应用于建筑结构中。它的制作方法是将这三种原料按一定的比例混合后，用竹片或木槌不断地炼打、翻动，然后堆放停置一段时间使其融合、老化。

特别是石灰和黄土都有一个从生到熟的演化过程。停置时间的长短应掌握在混合物未硬化之前，几天十几天不一，然后再次炼打、翻动。这样的炼打次数越多、越久则效果越好。而它的干湿度应掌握在用手捏可以成团状，用手揉又会散开为适。

这就是建筑上所用的“三合土”。用这种“三合土”夯打土楼的墙基那是相当坚实的。它可以承载巨大的压力，还可以防止洪水、山水的冲刷和浸泡。



图 1 三合土建造的土台

我们可以看出，三合土最重要的材料石灰，是由石灰石烧制而成的。而石灰石也是水泥的主要材料。所以他们有某些共同的特点。



图 2 用石灰作为主要粘合剂的万里长城

在西方水泥发明之前，也有相当长一段类似于中国使用三合土的历史，不过他们用的是石灰、石膏，沙子、火山灰等。一直到 1824 年 10 月 21 日，英国利兹（Leeds）城的泥水匠阿斯普丁（J. Aspdin）获得英国第 5022 号的“波特兰水泥”专利证书，成为公认的现代水泥发明人。



图 3 阿斯普丁像

“波特兰水泥”制造方法是：“把石灰石捣成细粉，配合一定量的黏土，掺水后以人工或机械搅和均匀成泥浆。置泥浆于盘上，加热干燥。将干料打击成块，然后装入石灰窑煅烧，烧至石灰石内碳酸气完全逸出。煅烧后的烧块再将其冷却和打碎磨细，制成水泥。

使用水泥时加入少量水，拌和成适当稠度的砂浆，可应用于各种不同的工作场合。” 该水泥水固化后的颜色类似英国波特兰地区建筑用石料的颜色，所以被称为“波特兰水泥”。 阿斯普丁父子长期对“波特兰水泥”生产方法保密，采取了各种保密措施。

水泥进入结构材料之后，由于世界设计与施工的需要，在全世界范围进行了大量的力学性能的实验研究。

首先是强度，由于水泥的性能依赖于原料生产过程不同，所以每一批次的强度会有差异。因之，出厂时要经过试验，标出它的强度。目前划分的强度等级的称为标号，分为 C10、C15、C20、C25、C30、C35、C40、C45、C50、C55、C60、C65、C70、C75、C80、C85、C90、C95、C100 共 19 个等级。例如，强度等级为 C30 的混凝土是指它的抗压强度的范围为 30MPa≤fcu，k<35MPa。

这里 fcu,k 代表同一批次混凝土立方体试块抗压强度标准值。即立方体试块一般取 150mm 边长，在摄氏 20°误差为 3°，相对湿度在 90%以上，经过 28 天的龄期的压强实验值。它是一个统计概率有 95%可靠度

的数值。fcu 是 force cube 立方体所受压强的缩写，k 是 key 缩写、即关键值的意思。

混凝土有一个特点，就是它抗压强度很好，而对拉力则很弱。实验表明，混凝土的抗拉强度仅为其抗压强度的 1/10～1/20。所以，最早混凝土在结构上只用在拉应力很小的条件下，例如柱子、桥墩、挡土墙等。

19 世纪中叶，炼钢技术得到了普及，人们开始能够大批生产钢。于是以钢作为主要结构材料的钢结构来到世界上。同时又由于钢具有很高的拉伸强度，人们自然想到用钢来补足混凝土的不足。这就是钢筋混凝土的诞生。

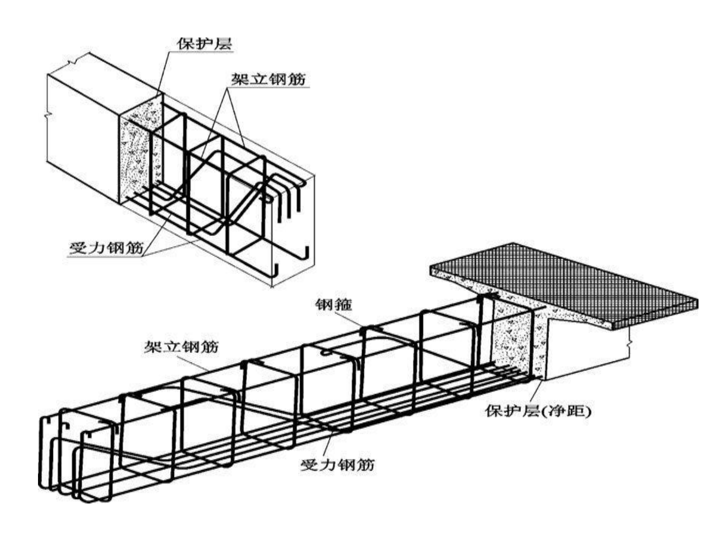


图 4 钢筋混凝土梁配筋示意图

通常认为法国园艺师约瑟夫·莫尼尔（en:Joseph Monier）于1849年发明钢筋混凝土并于1867年取得包括钢筋混凝土花盆以及紧随其后应用于公路护栏的钢筋混凝土梁柱的专利。1872年，世界第一座钢筋混凝土结构的建筑在美国纽约落成，人类建筑史上一个崭新的纪元从此开始，

钢筋混凝土结构在1900年之后在工程界得到了大规模的使用。

图4表示一根钢筋混凝土梁中钢筋与混凝土的分布情形。我们知道，梁在自重和承重下，中间层的应力近似为零，中间层下面受拉应力作用，上部受压应力作用。由于混凝土受拉的能力很弱，所以在梁的下部分配的钢筋就多。也许有读者会问，既然梁的上部混凝土抗压能力很强，为什么梁的上部还要配筋？这是因为，一根预制好的梁，做好后还会运输与吊装。在运输与吊装过程中，难免上部受拉。所以还是要适当配筋。一般说来，在配筋的时候，考虑截面上所有的拉应力全部由钢筋承受。大致上依此来决定配筋的多少。

钢筋混凝土来到世界上，由于他的高强度、耐久、便于施工的有点，很快被广泛应用于各种建筑中。图5、6、7表示一些钢筋混凝土结构的施工过程。



图 5 施工中的三峡大坝钢筋混凝土结构的一部分



图 6 唐山市二环路跨铁路桥梁施工



图 7 施工中的钢筋混凝土大楼

上面我们只是简单介绍了一般混凝土材料。随着技术的进步，混凝土也得到各方面的发展。混凝土有关的研究课题也不断提出。

首先是为适应不同的要求产生了不同种类的混凝土，有加重的，有加入泡沫的轻型混凝土，有颗粒微细可以作为涂料的水泥，有以有机高分子材料和水泥共同作用而制得的聚合物混凝土，有耐热混凝土，有耐酸混凝土，等等不一而足。

另外，人们研究出各种添加剂，以改善混凝土的性能和便于施工。例如施工时防冻的添加剂，防止混凝土固化时过分膨胀的添加剂，防止开裂的添加剂等等。

混凝土的结构的强度和应力分析，一直是结构力学最重要的研究课题。例如钢筋与水泥之间的开裂问题，这是一种界面断裂问题；混凝土的持久强度问题；在高速爆炸条件下混凝土的应力应变关系问题；混凝土配筋后的二次应力分布问题；不同龄期下混凝土的强度与应力应变关系；混凝土在交变应力作用下的疲劳强度问题等等。

总之，只要混凝土作为重要的结构材料，就有许许多多的问题提出需要人们去研究解决，混凝土的技术也得到不断发展。

2021,3,27

17 从材料的极限长度谈起

在前苏联别莱利曼写的《趣味力学》有一段关于材料强度的话：

每一条金属丝都有一个极限长度，到了这个长度便会由于自重而断裂。在这里加粗金属丝是没有用的，因为把直径加倍固然可以使它经受住四倍的重量，但是它的重量也增加到四倍。极限长度与金属丝的粗细无关，只看它是什么材料制成的：对于铁是一个极限长度，对于铜是另一个极限长度，对于铅又是一个极限长度。

接着别莱利曼列出了几种常见金属的极限长度：

铅丝　　200m，

锌丝　　2100m，

铁丝　　7500m。

最后，别莱利曼还计算根据他当时具有的强度最大的材料合金钢丝来说，它的极限长度是 8800 米，要想用它探测深海，还差一大截，因为海洋的最深处超过一万米。

别莱利曼说的是当金属丝是等截面的情形，我们我们要问，用不等截面的金属丝，在自重之下长度是否能够超过极限长度？答案是肯定的，而且能够无限长！

下面我们就来讨论如何做到。

如图，取 Z 轴向下为正，令金属丝的半径为 r，它是坐标 z 的函数。

我们知道在坐标 z 处它的半径位 r，于是金属丝的截面积就是 πr^2。再设金属材料的密度为 ρ 材料的需用应力为 σ，于是在 z 以下的金属丝的总重力应当是

$$\int_z^\infty \rho g \pi r^2 dz,$$

这里 g 是重力加速度。我们希望这根金属丝是等强度的，即在每个截面上的应力都是许用应力 σ。这样就应当是总重被截面积去除，也就是

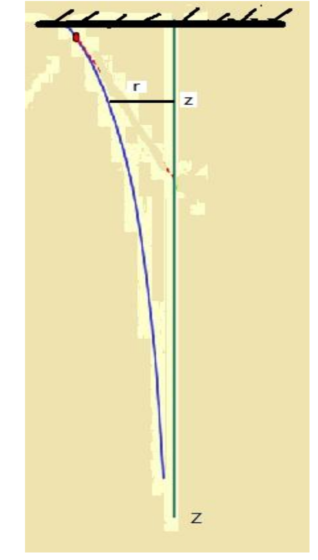


图 1 自重下 等强度截面

$$\frac{\int_z^\infty \rho g \pi r^2 dz}{\pi r^2} = \sigma,$$

亦即 $$\int_z^\infty \rho g \pi r^2 dz = \sigma \pi r^2 \quad ,$$

两边同时对 z 求微商，我们就得到微分方程

$$-\rho g \pi r^2 = 2\sigma \pi r \frac{dr}{dz},$$

即 $$\frac{dr}{dz} + \frac{\rho g}{2\sigma} r = 0。$$

这个方程的解是

$$r(z)=r_0 e^{-\frac{\rho g}{2\sigma}z},$$

这里 r_0 是当 z=0 时金属丝的半径。由这条曲线绕 z 轴旋转所成的物体就是我们要求的在自重下的等强度金属丝。

从解式看出，当金属的强度愈大一般说它的允许应力也愈大，截面的收缩愈慢，而当金属的密度愈大截面的收缩就愈快。

还应当注意的是，截面只要是相似的，例如可以是正方形、三角形等，其特征尺寸变化如上式，也是等强度的。而且可以证明，当 r_0 给定时，得到的金属丝的总重量是有限的。

需要说明的是，上面的结果是理论上的结果。其实当截面细到一定程度后，再谈它的承载能力，是没有意义的。不过，有这个结果指导，在实际问题中已经可以做得满足任何实际需要的长度了。

上面我们讨论的是铅垂的金属丝在自重下拉伸的简单问题。在实际中，结构是复杂的。例如人们竞相建造高度很高的建筑物，一次次突破以前的高度记录。建造高又高的建筑物，要考虑的受力就要复杂多了，有自重、风载、地震载荷，还有生活在其中的人和有关的付属物所造成的载荷。我们问，最高的纪录能有多高？还有，桥梁的跨度会有极限吗？飞机起飞重量有极限吗？等等，这一连串的问题，都是值得我们思考的。

2020，9，17

18 结构的破坏

结构由于自然灾害、年久失修或不当的设计施工，经常有失效、坍塌和破坏发生。这种情况，有时形成灾难性的后果，造成大量人员伤亡和财产的损失。

§1 结构破坏的类型

一般说来，结构破坏从力学上来看可以大致分为以下三种类型：即失衡、断裂与失稳。

由于失去平衡的破坏。

这种破坏类型，首先是结构整体或部分从静力学来看，所受的力失去平衡，以致造成结构倒塌或坍塌。这类破坏在人类早期只有简单的结构物时，比较普遍。简单结构的建造与维护也最早促进静力学知识的积累。即使到近代，由于设计与施工的违规或不合理。这类破坏也时有发生。下面我们举两个例子。

2009 年 6 月 27 日凌晨 5 时 30 分左右，上海闵行区莲花南路，罗阳路口西侧“莲花河畔景苑”7 号楼整体倒塌，造成作业人员肖德坤逃生不及，被压窒息死亡。

倾倒的主要原因是，楼北侧，在短期内堆土过高，最高处达 10 米左右；而紧靠南侧正在开挖地下车库基坑，深度達 4.6 米，大楼两侧的压力差使大楼主体失去平衡，导致房屋倾倒。



图 1 上海闵行莲花南路大楼倒塌的情形

2001 年 7 月 17 日，上海沪东造船厂在起吊重 600T 大型龙门吊主梁时，刚性腿固定不良，由于主梁上的小车碰撞缆绳 致使刚性腿失去平衡造成塔架坠毁。该事故造成 36 人死亡 2 人重伤，经济损失达 1 亿元。

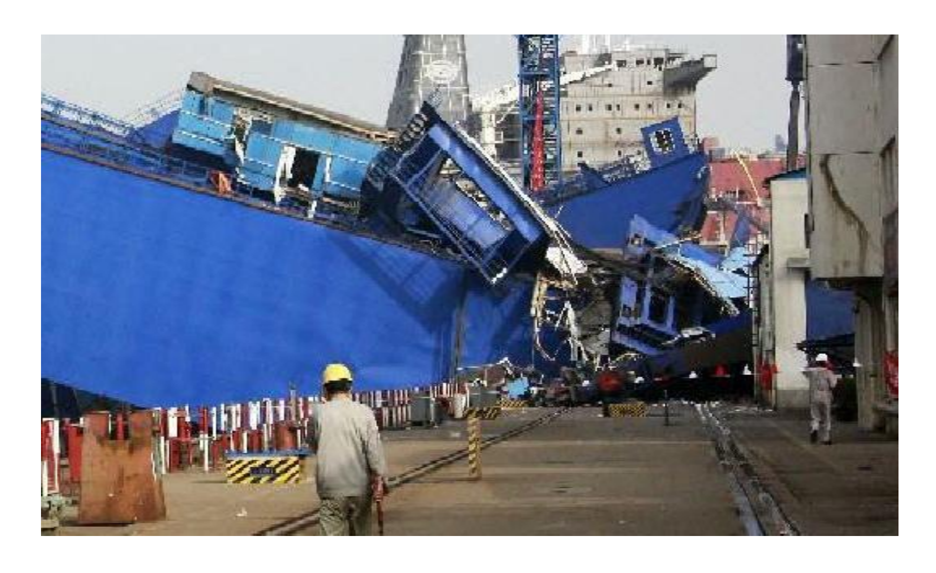


图 2 上海沪东造船厂在起吊重 600T 大型龙门吊主梁坠落事故

由于材料的断裂引起的破坏。

这类破坏类型是由于构成结构的某些重要构件破坏。例如梁断裂、支柱压裂、动力结构构件的疲劳断裂等。新加坡新世界酒店大楼的垮塌就是一个著名的例子。

1986 年 3 月 15 日，新加坡新世界酒店大楼在上午 11 点 25 分迅速解体，不到一分钟，其中任何人都没有时间逃脱。这场空前的灾难共造成了 33 人死亡，17 人受伤，被称为“二战以来新加坡最大的灾难”。

事后弄清楚了原来大楼在设计时，把载荷计算小了，只计入活荷载没有计入大楼自身的死荷载。这已经造成大楼底层的承力梁柱体产生裂

缝。这些裂缝并没有引起管理人员的注意，而更加雪上加霜的是管理人员又在外墙加了一层瓷砖，在天台加了一个水箱。这就导致底层梁柱断裂而整座大楼坍塌。



图 3 新加坡新世界酒店大楼倒塌之前



图 4 新加坡新世界酒店大楼倒塌之后

由于构件的失稳导致的结构破坏。

从 19 世纪 50 年代，人类能够大规模冶炼钢铁，钢铁与其他高强度材料陆续产生，于是钢结构应运而生。由于钢的强度高，结构元件能够做得细、薄。这时它们的强度虽然没有问题，但由于细、薄，却产生了元件的失稳问题。例如受压的杆，产生像材料力学中所介绍的压杆失稳，而板、壳等元件也会有类似的失稳的现象。元件失稳后，它的法向刚度会大大减弱，与它相连的构件会产生很大的位移，而这种位移又会导致结构内部应力的重新分布，部分元件强度和稳定性不能达到要求，就会产生破坏或失稳的连锁反应，以致使整个结构坍塌。

美国坐落在康涅狄格州的哈特福德体育馆的坍塌就是一个由于元件失稳造成坍塌的典型例子

哈特福德市的体育馆建于 1973 年，结构形式为空间网架，网格尺寸约 9 米，跨度 91x110 米的大体育馆。1978 年 1 月 18 日，哈特福德市中心体育馆在近 5000 名观众离开后的几个小时内轰然倒塌。其钢网壳组成的屋顶在雪的重压下崩塌。1400 吨钢材、石膏板吊顶和建筑屋面砸在 1 万个空座位上。造成的损失估计约 9000 万美元。

事故的原因是由于网架上部的受压杆失稳引起的。还由于在设计时对固定荷载低估了约 20%，进一步又将边界处的上弦杆长度按照一半计

算，使上弦杆的抗稳定性提高了 4 倍从而又降低了承载能力。

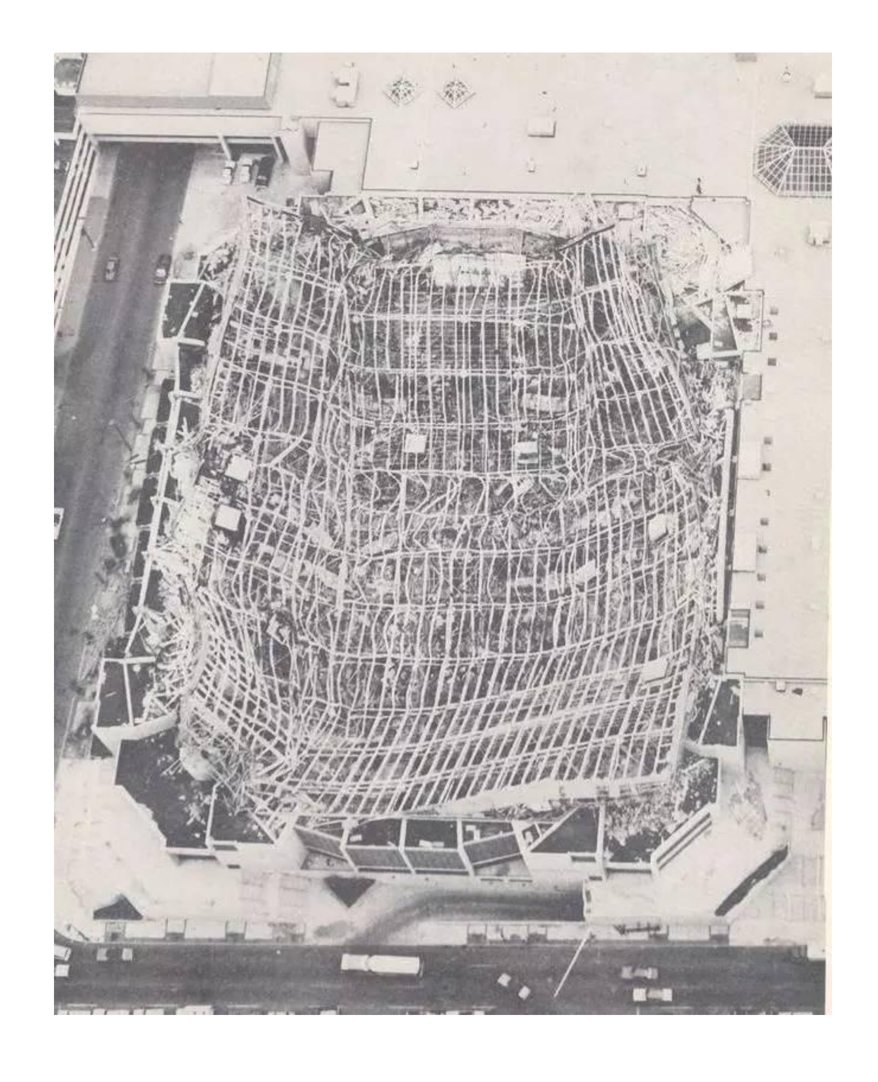


图 5 哈特福德市体育馆坍塌现场

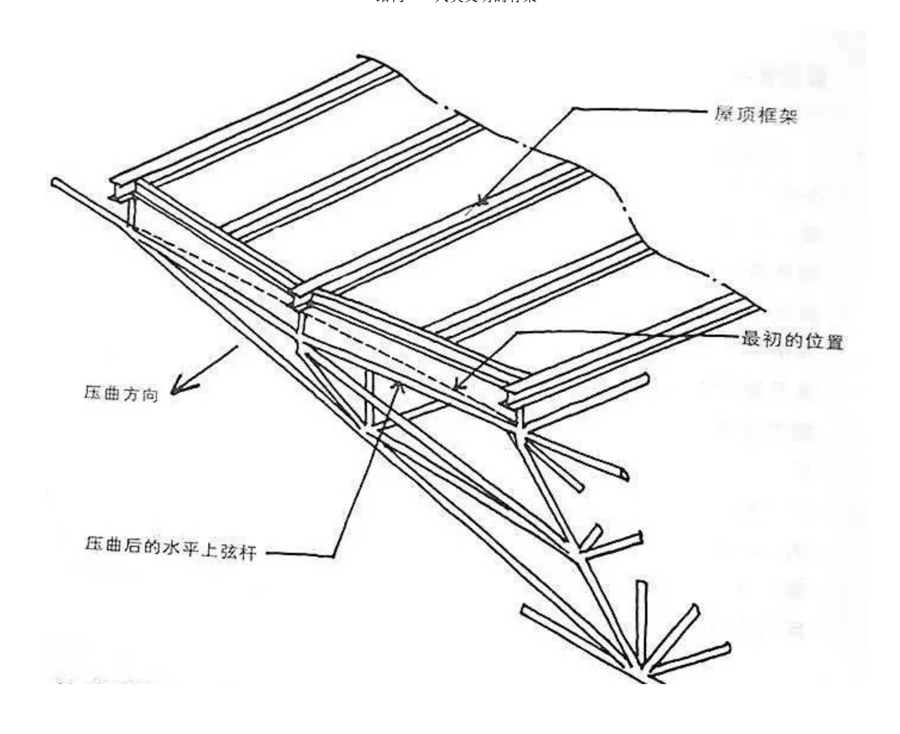


图 6 压屈的上弦杆

§2 结构破坏的原因

结构破坏的原因很多，有材料不合格的原因，有日久材料腐蚀的原因，有自然灾害的原因，有操作失当的原因，还有设计和施工不合理的原因等等。归纳起来，我们大致可以把引起结构破坏的原因归结为三类：这就是：自然灾害、设计和施工错误、人类从未遇到过的新的破坏现象。我们分别举一些例子加以说明。

自然灾害引起的结构破坏

在自然灾害中对结构引起大范围大规模破坏的，要数地震、台风和海啸了，不过海啸也是由地震引起的，而台风对我国而言多发生在东南沿海一带。我们以近年来发生在我国的两次大地震为例。

1976 年 7 月 28 日 3 时 42 分 53.8 秒，中国河北省唐山丰南一带（东经 118.2°，北纬 39.6°）发生了强度里氏 7.8 级（矩震级 7.5 级）地震，震中烈度 11 度，震源深度 12 千米，地震持续约 23 秒。地震造成大范围大规模的工业与民用建筑结构破坏，一片废墟，从而引起 242769 人死亡，164851 人重伤，位列 20 世纪世界地震史死亡人数第二。



图 7 唐山大地震后



图 8 唐山大地震后

2008 年 5 月 12 日 14 时 28 分 04 秒，在四川汶川发生地震。此次地震的面波震级里氏震级达 8.0Ms。极重灾区共 10 个县（市），造成大范围结构破坏。汶川地震共造成 69227 人死亡，374643 人受伤，17923 人失踪，是中华人民共和国成立以来破坏力最大的地震，也是唐山大地震后伤亡最严重的一次地震。



图 9 汶川大地震后



图 10 汶川地震后

从我国发生的这两次地震可以看出，自然灾害造成的结构破坏的严重性。一般说来要完全避免地震造成的损失是很难做到的，但是如果经过研究改进结构抗震设计标准，尽量减少地震所带来的损失，是能够做到的。世界上一些地震多发的国家的经验值得我们汲取。在 2010 年 2 月 27 日发生的智利大地震，震级达到 8.8 级，超过唐山和汶川地震，但是那次地震却只死了 507 人，智利的建筑规范是从美国引进的，由于美国对抗震结构研究得比较多，所以智利的地震损失就比较少。抗震结构研究的关键是，要让在强烈地震后，结构虽然损坏，但能够留下较多的生存空间。读者比较唐山、汶川和智利震后的几张图片，注意智利震后，结构虽然损坏，但并没有完全坍塌，跟人们留下了较多的生存空间。这的确值得我们在修改结构抗震规范时借鉴。



图 11 智利地震后的房屋建筑



图 12 智利地震后的高楼

在自然灾害中，有一类比较少见但引起的结构破坏也相当可观的情形。例如龙卷风，对于我国来说，同一地方大约要数百年才能遇到一次。即使在北美大陆，龙卷风虽然比较多，但人的一生要在同一地方见到，也是罕见的。

我们举 2008 年在我国南方一场气象异常造成的灾害为例。在春节前后，长江中下游的大雪灾引起了输电线路大面积灾害性事故。全国范围内，截止 2 月 6 日除夕夜统计，受冰雪灾害影响，有 169 个县停电，南

方电网供电范围累计 90 个县市受停电影响，因冰灾、雪灾导致输电线路大范围覆冰、舞动、主网架相继发生倒塔事件，故障累计停运线路 6767 条，造成变电站停运 831 座。输电线路在灾害面前呈现的脆弱性表明，必须采用先进技术手段提高我国输电线路抗灾能力。

这次下雪的天气奇特之处，在于气温一直在零度上下波动，刚刚化了的雪马上结为冰，致使电线上结的冰超过电线自重的几十倍之多。造成线路大规模损坏（图 13-17）。



图 13　2008 年在我国南方气象异常造成的灾害



图 14 2008 年在我国南方气象异常造成的灾害



图 15 2008 年在我国南方气象异常造成的灾害



图 16 2008 年在我国南方气象异常造成的灾害



图 17　2008 年在我国南方气象异常造成的灾害

这场雪灾，给我们的教训，为了防止类似的灾害发生，需要适当提高电路结构强度的设计标准，并且研究相应的防冰除冰措施。

由于人为的设计和施工失误引起的结构破坏

我们在《结构破坏的类型》那一节所举的例子都是由于设计和施工失误引起的结构破坏。

中国古代的结构多为木结构，而木结构很容易着火，中国人把火灾归结为天灾，其实绝大部分火灾都是由于人们用火时的疏忽造成的，

我国的故宫历经明清两朝共有 24 位皇帝在那里居住办公，然而在这四百多年间，故宫并不太平，根据史料记载，400 年间发生过 80 多次火灾。作为皇帝住所，遭遇火灾的频率却远远高于平常老百姓家。这是因为故宫不仅有大量经过干燥的木材建筑的木结构，故宫的面积达 70 万平方米。还由于故宫里比民间有更多的灯火、取暖火、节庆花灯、焰火，炊事火等等。

明朝嘉靖二十六年（1547 年）十一月的一天，后宫突然起火，火势迅猛，很快就把皇后的寝宫吞没。堂堂明朝的皇后，居然被大火烧死。

特别值得一提的是在明清科举最高级别考试的贡院也屡屡失火，最严重的一次是明天顺 7 年（1463 年）失火，一次烧死举人九十人（一说是 116 人）。

近年来，我国也发生过若干次严重的火灾事故，造成巨大的人财损失。

可见，防火设施与国民的防火与安全用火的知识普及，任何时候都不能忽视，此外还需要加强防火的科学研究。

我们在这里最后再举一个设计施工失误的著名的例子。

加拿大魁北克三跨钢桁架梁的大桥，主跨549米，建造历经30年，施工期间两次发生垮塌事故：第一次在1907年8月29日压杆失稳，75人丧生；第二次是中跨合龙时起吊设备局部构件断裂，13人丧生。大桥最终于1917年竣工运营。

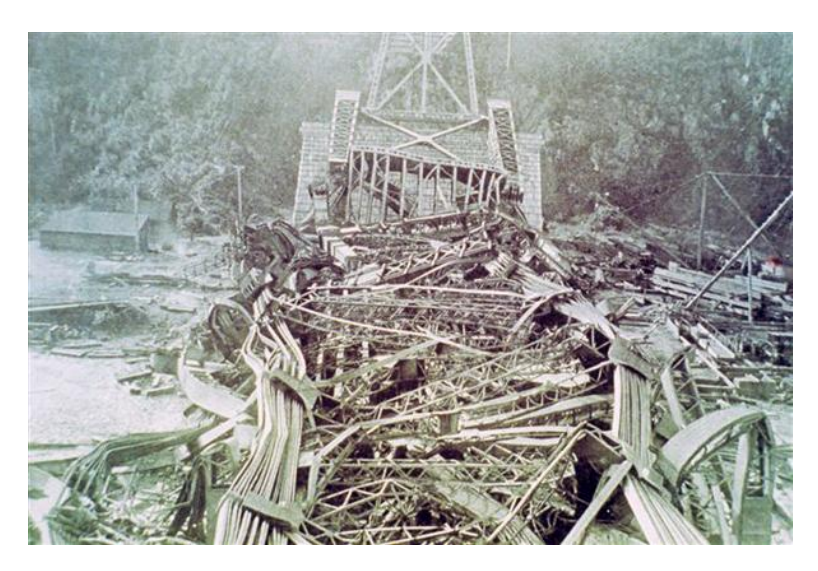


图18 事故后的魁北克桥

经过事故调查，确定大桥事故的主要原因简述如下：

（1）魁北克大桥坍塌是因为主桥墩锚臂附近的下弦杆设计不合理，发生失稳。

（2）杆件采用的容许应力水平太高。

（3）严重低估了自重，且未能及时修正错误。

（4）魁北克桥梁和铁路公司与凤凰桥梁公司的权责不明。

（5）魁北克大桥和铁路公司过于依赖个别有名气和有经验的桥梁工程师，导致了桥梁施工过程中基本上没有监督。

（6）凤凰桥梁公司的规划和设计，制造和架设工作都没有问题，钢材的质量也很好。不合理的设计是根本性错误。

（7）当时的工程师不了解钢压杆的专业知识，没能力设计如魁北克桥那样的大跨结构。

1922 年，在魁北克大桥竣工不久，加拿大的七大工程学院（即后来的“The Corporation of the Seven Wardens”）一起出钱将建桥过程中倒塌的残骸全部买下，并决定把这些亲临过事故的这些钢材打造成一枚枚戒指，发给每年从工程系毕业的学生。然而由于当时技术的限制，桥梁残骸的钢材无法被打造戒指。于是这些学院只好用其它钢材代替。不过为了体现是代表桥坍塌的残骸，戒指被设计成被扭曲的钢条形状，用来纪念这起事故和在事故中被夺去的生命。于是，这一枚枚戒指就成

为了后来在工程界闻名的工程师之戒(Iron Ring)。这枚戒指要戴在小拇指上，作为对每个工程师的一种警示。



图 19 工程师之戒

由于未知因素引起的结构破坏

我们把违反已知规律而造成的结构破坏归结为”设计和施工失误所引起的结构破坏”。在和结构有关的领域，我们已知的事物总是有限的。还有许许多多的事情是我们没有经历过或没有研究清楚的。于是我们就会与到这样的情形，我们的设计和施工都是符合当时的规范和规定以及人们的常识的，但是结构还是破坏了。这样的例子可以举出很多。

在 1940 年建成的美国的西北部一座吊桥，长 853.4m 的塔科马（Tacoma）大桥，建成后不久，由于同年 11 月 7 日的一场不大的风（仅每秒 19m）引起了振幅接近几米的“颤振”，在这样大振幅振荡下结构不一会便塌毁了。

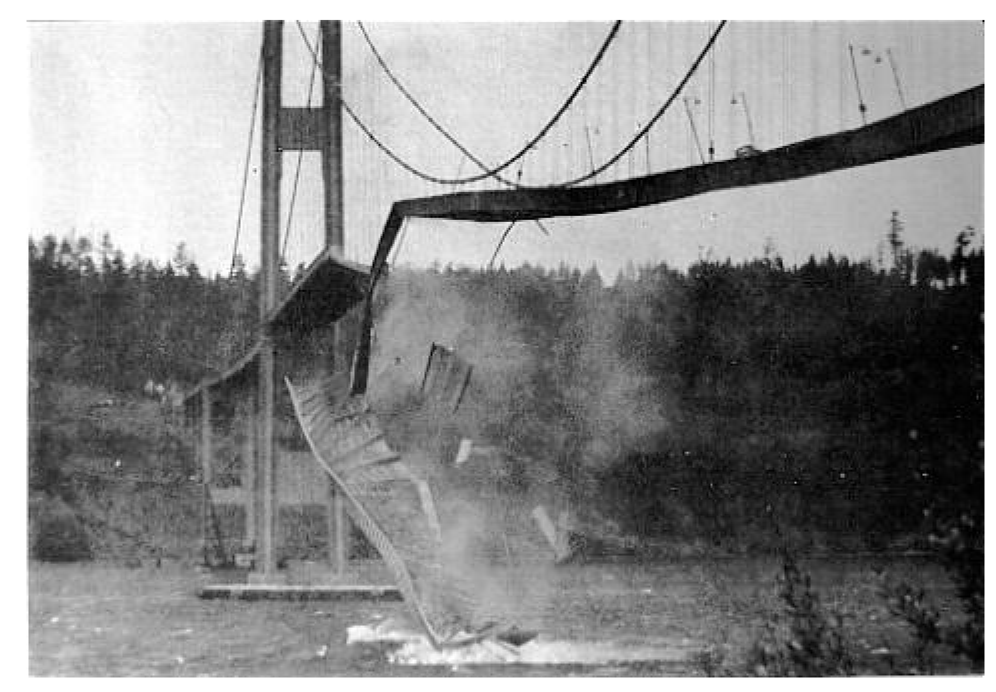


图 20 塌毁的塔科马大桥

事后发现是由于风引起的桥梁振动造成的结构破坏。早先的结构使用的材料比较重，所以对于风的作用可以忽略，到了使用钢结构时代，风就起重要的作用了。类似的事故，引起人们充分的注意。迄今在建造

钢结构桥梁或吊桥、斜拉桥，在设计时都要对风的作用研究，并且还要做风洞模型试验。后来类似的结构破坏就减少了。

同样，19 世纪后半叶出现的由于材料疲劳所产生的结构事故、20 世纪 40 年代所遇到的飞机颤振空难、一战到二战之间轮船与桥梁许多由于材料冷脆性造成的破坏，等等。都是前人没有经验过的新的破坏事故类型。它们促使人们对这些现象进行深入的研究，从而避免类似的破坏发生。

人类的结构技术和结构材料在不断前进，在前进的路上还会遇到新的破坏现象，因之与结构安全性的研究，将是永远的，永无止境的。

附带说明，由于现代结构规模一般都很大，例如高层建筑、大型桥梁、大型冷却塔、巨型轮船等等、在需要拆除它们的时候，一般机械效率很低。这种情况下，经常采用爆破的办法，借助于炸药的威力能够大大提高效率。当然了在战争中，战斗双方互扔炸弹，对结构的破坏效率也是很高的。不过人类的前进主流方向还是如何使结构物安全、用得更久，这也是全人类投入最大部分人力物力的主流方向。

2020 ，02,21

19 高楼边上为什么风大?

平常我们都有这种经验，在高楼边上风比较大。这是什么道理呢？

要回答这个问题，需要一点流体力学的知识。这里当然不可能板起面孔从头来讲流体力学，我们只需要提到流体力学的一个结果，这就是，在略去流体的粘性的条件下，又考虑流体无旋流动。这是流体的一种最简单的模型，即使是这样，就大致能够说明我们所关心的问题。在这种条件下，考虑一个圆柱体和一个球体在远处有一个来流的流体中，对周围流体速度的影响。

如图 1，设远处来流是从左边流来，速度是 U，坐标原点取在圆柱和球的中心 以右向为正方向，以来流方向与半径的夹角为 θ，令柱和球体的半径都为 1。

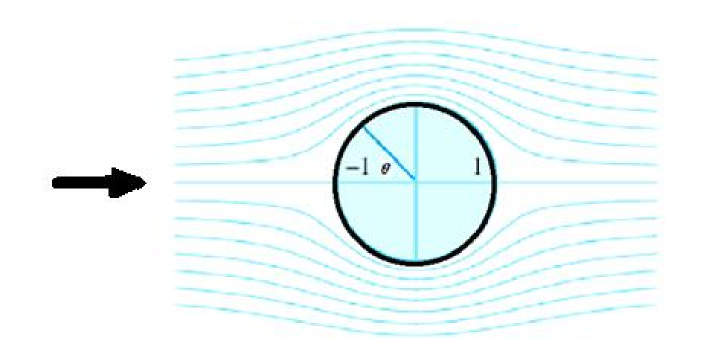


图 1 圆柱和球的绕流问题

这个问题的理论解在很多教科书上都能够找到。结果是：

绕柱流动速度的极坐标两个分量是：

$$V_r=U(1-1/r^2)\cos\theta$$

$$V_\theta=U(1+1/r^2)\sin\theta \qquad (1)$$

由于对称性，环绕来流方向的速度分量为零，所以沿球流动速度也只有两个分量，即沿径向与纬向的两个分量是：

$$V_r=U(1-1/r^3)\cos\theta$$

$$V_\theta=U(1+1/2r^3)\sin\theta \qquad (2)$$

由（1）与（2）看出，当 $r=1$ 时，即在柱面和球面上，柱与球绕流的径向分量都是等于零的，即在柱面和球面上，流动的径向速度为零，即没有流体从柱和球内流出也没有流进，这正是柱和球绕流所应当满足的条件。

现在我们来看（1）与（2）的 θ 方向的速度分量。在 $r=1$ 时，即在柱面和球面上，由于这里的速度径向分量为零，所以它就决定了那个地方的整个速度，我们看到它是与 θ 有关的，当 θ 等于 0 或 π 时，即在柱与球的迎风点和背风点，速度为零。而当 $\theta=\pi/2$ 时，即与来流方向成 90° 的夹角时，速度达到最大。对于圆柱是 $2U$，对于球是 $3U/2$。这说明，在那个地方，局部速度都比无穷远处的速度要大，对于圆柱是 2 倍，对于球是 1.5 倍。

好了，至此你该明白为什么在高楼边上风大的道理了吧。我们把身边的高楼可以近似地看作一根直立的柱子，然后把这根柱子又近似地看作一根圆柱，这样的近似未免很粗糙，但从性质上大致是不会错的，在圆柱边上，风的最大速度，应当是旷野地方即无穷远处风速的两倍。其实即使把一座不太高的建筑近似看作球，其附近风速最大处，也有旷野风速的 1.5 倍。所以在建筑物附近风速会比同时在旷野地方要大。另外你从低矮建筑物走到高楼边上也会感觉风速变大，因为风速由旷野风速的 1.5 倍增加到了 2 倍。

可不要小看风速增加的这个倍数，因为人对风的感觉是风的阻力，我们知道风的阻力是与风速的平方成比例的。也就是说，在高楼与底楼边上我们受到的风力是旷野风力的 4 倍或 2.25 倍。这当然是一个很可观的数字了，所以在有风的天气里，人们到了高楼旁边明显感觉到风比别处大。另外从对风的等级划分来看，比方说，在旷野刮的是每秒 8.0 到 10.7 米的风，这相当于 5 级风，俗称“清风”，可是它的二倍风速就是每秒 16 到 21.4 米，大约就是平常的八级大风了，就是它的 1.5 倍，也接近 7 级大风。可见建筑物对风速的影响是多么大。上面的讨论，与实际情况由于空气是有粘性的，还由于实际流动中的漩涡等因素，结果会比实际情况略大一点，但作为定性的了解这个问题是足够了。

高楼边上风大，对日常生活影响不会太大，风大时，少出门，或者出门时不小心把帽子吹掉了，这都是小事。比较重要的是，它启示我们，在有风的天气，绕高楼走一圈，会感到有的地方没有风而有的地方风特大，在我们做结构设计时不能忽视这种结构物局部不同风速的影响。如果不小心就会出事故。

比较著名是北京国际机场三次被掀顶的事故。

为迎接2008**年奥运会兴建的北京首都国际机场**3**号航站楼**，建筑面积90多万平方米，新增机位99个。于2008年10月投入试用。据说是按照百年一遇的风速来做结构设计的。



图2　北京国际机场三号航站楼

但是建成不久却被大风三次掀顶。第一次是 2010 年 12 月 10 日据报道当时首都机场风速达最高达 26 米/秒，最大风力为 10 级；第二次是 2011 年 11 月 22 日，据北京首都机场新闻中心公布的信息所知，当天 18 点 55 分，首都机场风速最高达 24 米/秒；第三次是 2013 年 3 月 9 日，据首都机场官方微博消息，当天 11 点 40 分，首都机场风速高达 30 米/秒，风力达 11 级。



图 3 北京国际机场三号航站楼被风把金属屋顶掀开的情景

其实类似的事故还有。2007年7月27日，武汉机场二期工程的主候机楼，在11级风作用下，金属屋顶被掀起100多平方米，据说原设计可以经

受12级大风；2012 年8 月8 日，因受到台风“海葵”影响，苏州市有8-10级大风，苏州火车站园区站房金属屋面15 块1.0mm 厚铝镁锰合金直立锁边屋面板遭到破坏，苏州火车站园区金属屋面按GB50009-2006 年版设计规范应能12级大风,但在10 级大风下便破损。



图4 武汉天河机场屋顶边角区屋面板、保温棉等均被暴风揭掉

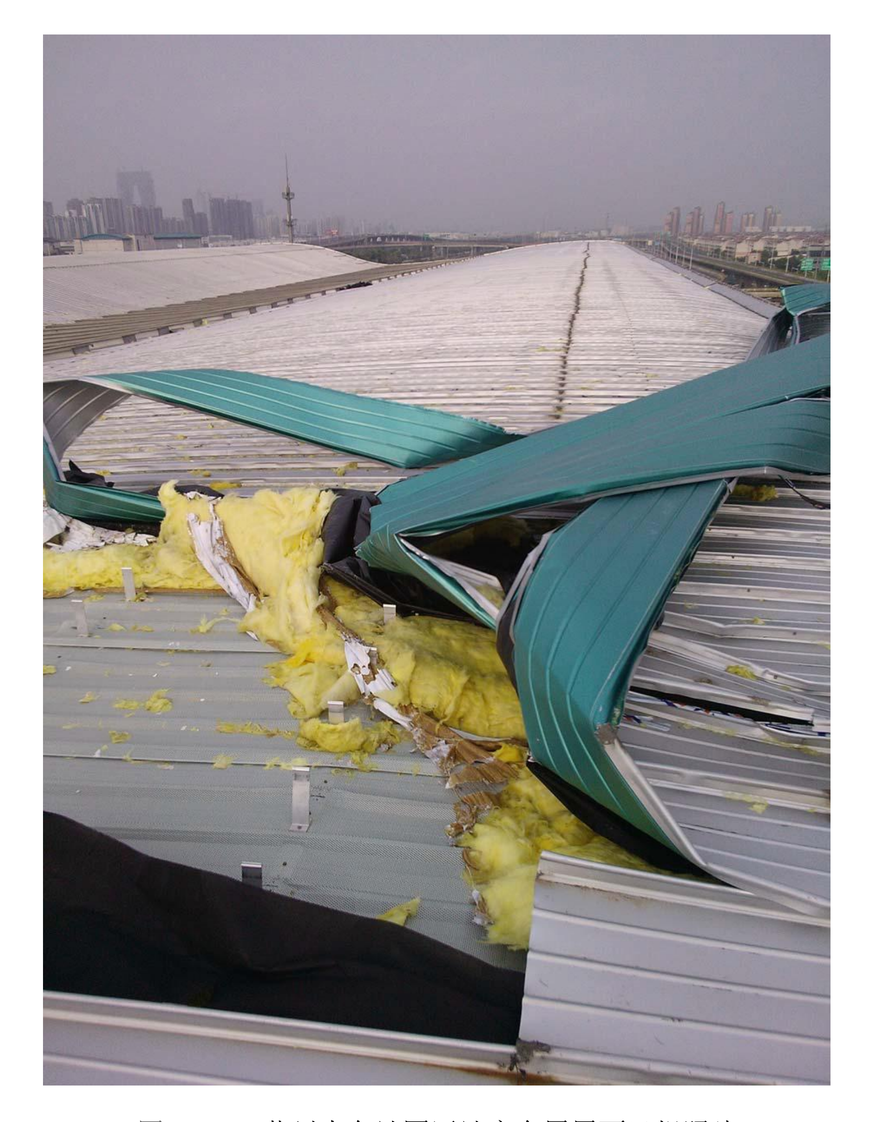


图 3.2-4 苏州火车站园区站房金属屋面风损照片

看了这些事故，不由得使人想起唐代杜甫的一首《茅屋为秋风所破

歌》的诗，说道："八月秋高风怒号，卷我屋上三重茅。"杜甫的小小茅屋，在秋风怒号时，屋顶上的风速已经大到足以把茅草卷起的地步。北京机场大楼和武汉苏州的事故，屋顶上的风速会比地面的平均风速大好多，足以把金属覆盖结构揭开，把隔热层的填充物吹落得满机场飞舞，假如杜甫是机场大楼的首座，恐怕也只能"归来倚仗自叹息"了。

以上所举的数例，都是要么设计时说可以耐百年一遇的大风，5年内就坏了三次，要么说可以耐12级大风，可是在11级就稀里哗啦了。这说明设计时对结构的风荷估计不足。其所以估计不足，是由于对这种大型、大跨度的结构在风的作用下的受力，从一部分到另一部分之间变化之大严重估计不足。跨度达数百米的的屋顶，风的作用力是变化很大的，就像我们一开始介绍的柱和球在风的绕流下风速变化很大的情况。而所介绍的几例大型结构也都有一个共同的特点，就像一根巨型圆柱横卧在地面上或是叩在地上的半球，屋顶处的风速肯定比别的地方要大许多，但是整个屋顶却用同一的结构强度设计，风当然会在它认为比较薄弱的环节把它掀起来了。

我国现行的结构设计载荷规范关于风荷的部分，比较大的篇幅强调的是结构整体的受力计算，而对大型结构的局部受力会变得特别大注意不够，一般设计人员对于这种局部需要特别补强也没有认识。这大概就是这类破坏事故频频发生的主要原因。当然了，也有可能是对风载的估

计够了，而涉及有关结构强度的规范没有达到需要的标准。反正荷载和强度两方总会有一方有问题，要么两方都有问题。这些事故说明，规范需要改进，设计人员需要补充知识以适应新的大型结构的设计，这类问题值得去认真研究以避免同类事故的一再发生。

参考文献

[1] 叶敬棠等， 流体力学， 复旦大学出版社，1989

[2] 张兆顺 崔桂香， 流体力学（第二版），清华大学出版社，2000

[3] 周光垌 严宗毅 许世雄 章克本，流体力学（第二版），高等教育出版社，2002

[4] 龙文志， 首都机场 T3 航站楼屋面不要第四次再被风掀开-提高金属屋面抗风力技术探讨-，《中国建筑金属结构》，2013 年 15 期

2016，8，17

20 大型冷却塔结构分析的回顾与展望

§1 引 言

如果你远望一座大型发电厂，最引人注目的是一座或数座顶端冒白汽、外形为旋转双曲面的庞然大物，这就是冷却塔. 它们是用来做什么的？粗略地说，是为了提供发电设备冷却水用的.

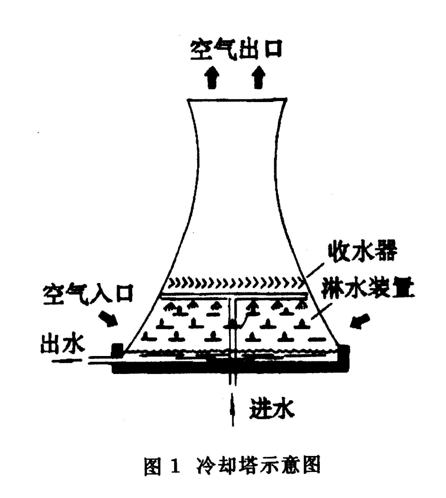


图 1 冷却塔示意图

一座大型发电厂对冷却水的需求量之大是惊人的. 一台 10×10^4 kw 的发电机，大约需要 $3m^3/s$ 的水流量去冷却，即是说一座 10×10^5kw 的发电厂，需冷却水约 $30m^3/s$. 需知北京市的用电量是数百万 kw，而

象北京城边的永定河平均流量只有 20 m^3 年左右，何况天旱时河水还会断流．而且直接用河水冷却后，水温上升，再排入河中，还会产生热污染的严重问题．冷却塔就是为解决这一难题而建造的．

我们知道，火力发电厂发电是使用热机，即汽轮机变热能为机械能，而理想热机的效率是

$$\eta = (T_1 - T_2) / T_1$$

此处 T_1 为作功前蒸汽的温度，T_2 是作功后蒸汽的温度（绝对温标）．从公式看，要提高 η 值，要么增大 T_1 或者减小 T_2．但通常由于材料性能的限制，T_1 不能太高. $T_1 < (560^\circ C + 273^\circ C) = 833^\circ K$ ，因为一般材料超过 560°C 会产生其他力学问题．所以减小 T_2，是提高热效率的主要途径．这就需要大量的冷却水．

冷却塔的工作原理如图 1，冷却热机的水被热机加热后，用泵打到塔筒的 h 高程，然后以淋水方式喷洒下来，在降落的过程中，水被空气冷却了而空气却被加热了，加热后的空气比重减小，所受浮力增大，在浮力作用下，空气上升到塔顶冒出．塔愈高，空气浮力愈大，空气上升速度也愈大，冷却效率也愈好．

冷却后的水降入水池，然后再被用于冷却热机，循环不已．所以冷

却塔在缺水区建电厂是绝对必需的．用冷却塔冷却可以比用直流水冷却省水 97％，并且使水温平均降低 11°C．

冷却塔的结构主体是一种典型的薄壳结.目前典型的大型冷却塔大约高 150 m，底部直径大约是 150 m，就是说，它的底部可以容纳一个足球场．然而它的厚度却很薄，最薄处只
有 20cm．如果将冷却塔成比例地缩小到鸡蛋壳直径大小，则它比鸡蛋壳还要薄，仅及鸡蛋壳厚度的 1／5．这大概也就是冷却塔结构分析的难度所在.从本世纪初冷却塔面世以来，随着发电机组容量加大，冷却塔也愈高大．1965 年 11 月 1 日，英国渡桥电厂的 8 座冷却塔在 8 级风中倒掉了 3 座．1973 年 9 月 27 日，英国 Ardeer 又在大风中倒掉了 1 座冷却塔.之后，国外在地基下沉，以及施工期都有倒塔事故的报道．这些事故引起了国际上的普遍注意，事实说明在设计冷却塔时，对它的外载与应力分析应当给以格外充分的注意．

约在 1973 年，我国自行设计的冷却塔，由山东辛店电厂开始兴建，要求达到 90 m 高度，在此之前建造的冷却塔大部分为 60m～70 m 高，这就要求我们独立地进行分析研究．

§2 作用在冷却塔上的风载

作用在冷却塔上的风载体现为来流风速为 v 时塔周每一点的压力.这

个压力依与迎风方向的夹角变化，可用下式表示

$$p = \frac{\rho v^2}{2} f(\theta) k(z)$$

其中 ρ 为空气的密度．其实风压沿塔高也是有变化的，随着高程 z 加大风压也增大，其中

$$k(z) = (\frac{z}{10})^{\alpha}$$

系数 $\alpha = 0.24 \approx 0.4$，视地貌平坦或粗糙而定.

1973 年以前，中国、民主德国以及苏联大部分的冷却塔设计计算采用的风压分布为罗比用公式，即

$$f(\theta) = -0.7 + 0.5\cos\theta + 1.2\cos 2\theta$$

而在英美各国大部分采用 Batch一Hopley 曲线，即

$$f(\theta) = \begin{cases} 1.524\cos(1.89\theta) & 0^\circ \le \theta < 47^\circ 6' \\ -0.79\sin[(\theta - 47^\circ 6') \times 3.61] & 47^\circ 6' \le \theta < 100^\circ \\ 0.21 & 100^\circ \le \theta \le 180^\circ \end{cases}$$

从 1973 年开始，北京大学以孙天风教授为首的研究小组，利用当时辛店冷却塔原型的 1／100 模型进行风洞实验，为了模拟雷诺数相似，在模型上沿母线贴了 32 根丝线，得到了一个新的风压分布，这个分布被称为北大 S_{32}，它的余弦级数展开的前 20 项为

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{n=19} a_n \cos n\theta$$

a_0 =−0.44442　a_1 =0.24348；　a_2 =0.67694　a_3 =0.53486,

a_4 =0.04963　a_5 =−0.15111　a_6 =−0.00256　a_7 =0.07131,

a_8 =−0.00706　a_9 =−0.03494,　a_{10} =0.01063　a_{11} =0.00658,

a_{12} =−0.01133　a_{13} =−0.00800　a_{14} =0.01493,　a_{15} =0.00658,

a_{16} =−0.0146　a_{17} =−0.00602,　a_{18} =0.00761　a_{19} =0.00602.

这个风压分布经过1981年和1982年北京大学与西安热工所对河北马头和广东茂名的两座冷却塔原型上，在有风的情况下实测风压结果符合较好．这一风压分布与己有的风压分布曲线对比示于图2.之后我们实际分析冷却塔结构就是使用它，在实用中

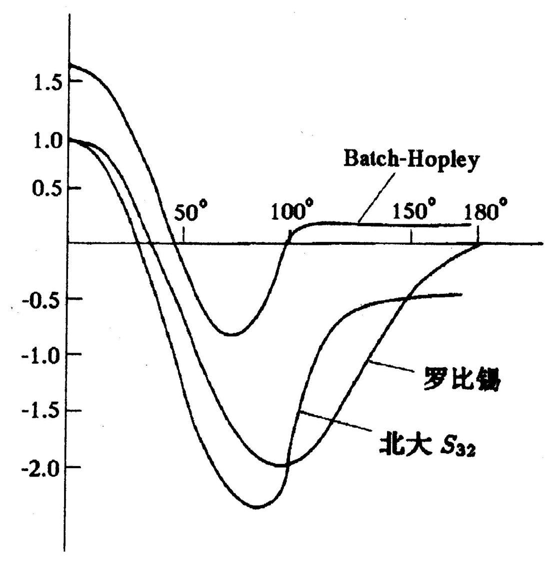


图 2　3 条风压分布曲线

仅取前 6 项或前 8 项就足够精确了.

§3 大型冷却塔的结构分析

19 73 年以前，国内对大型冷却塔结构分析大部分是基于旋转壳的无矩理论，或即薄膜理论. 它是将壳体平衡方程中忽略弯矩与横向剪力的简化模型，而且大部分采用手算，后来有一个小机器上的程序.

1973 年后，我们受电力部的委托，着手编制一个能对任意风压分布、温度分布、变厚度、考虑基都离散支柱支承的静力与动力分析的通用程序.

在理论讨论中，我们采用了基于直法线的薄壳有矩理论，而没有采用当时国外流行的将法线转角与法向挠度相互独立的 Mindlin 模型. 在离散化格式上采用了高精度的旋转壳元，即在环向用三角级教展开，子午向上分为节圆，按节圆给出位移直到二阶导数的插值方案（环向位移直到一阶导数）.

这种方案有效地避免了当壳体非常薄时结果精度很差的“锁住”现象，在求解中采取了紧缩存储，子空间迭代等一系列技巧.

经过了一年努力，1974 年夏静力分析的 BS 程序投入了运行. 1975 年夏，动力分析程序 BSD 也投入了运行.

运用以上两个程序对大量算例进行了分析对比，从而为冷却塔设计

给出了一些新的概念：

（1）建议抛弃以往塔厚从基部开始沿高程指数变化减小厚度的方案，改为基本上等厚的方案，仅在基部附近厚度增大而且线性过渡。这样做，不仅对塔体应力分布有利，而且减少了施工的复杂化.

（2）在大部分情况下，塔高不超过 90m 时，风载是主要的控制载荷.

（3）在能抵御风载引起的内力以及能经受风载下稳定性考验的条件下，壳体的厚度应当尽量小，以使减小由于壳内外壁温差引起的温度应力.

两个程序投入运行后，被移植到各种机器上，80 年代后又改编为 Fortran 语言，并且不断改进. 用它们分析并成功地设计了 500 座以上的冷却塔. 其中最近设计的冷却塔高度达 150m. 它们已成为全国各电力设计院采用的主力程序. 此外它们还被用于化工厂的容器分析、民用污水池、筒仓以及导弹弹体的结构分析. 在反复使用中，它们的计算结果受到来自各方面的严峻考验，事实证明它们是可靠的. 这里略举几例.

（1） 1976 年唐山大地震后，唐山电厂 60 m 高的冷却塔，塔筒结构完好无损.这一事实证实了 1975 年我们对该塔分析的预言：可以经受 11.5 度的地震.

（2） 1989 年，同济大学从北京大学固体力学教研室购买了一套袁明武教授开发的 SAP84 微机结构分析程序，在分析一个典型的圆柱壳结

构时，他们发现与国外的一篇文章得到的最低频率相差太大，而无法接受．经过用 BSD 计算了前面 69 个固有频率与振型，发现国外文献上的最低频率是准确结构的第 11 个，而前边有 10 个固有频率国外那篇文章全部遗漏．SAP84 计算结果虽有误差但基本可用．这才打消了该校对 SAP84 的疑虑．

（3）与同期美国 P．L．Gould 教授发展的旋转壳分析程序 SHORE 相比,计算结果发现SHORE在动力分析时遗漏了最小的扭转振型.而且SHORE与 BS、BSD 相比，在程序功能大体相当的条件下，长度是我们程序的 20 倍．

然而，应当看到这些比国外更准确的结果是在极为艰苦的条件下得到的．当时，国外大部分同类论文结果是在 IBM－370 系列机器上取得的．这种机器内存有 512K－4M 字节．而我们当时使用的机器却是国产的 DJS21，内存只有 8K.

1975 年以后，我们对这些软件进行了改进和发展，使它们能适应新的更为复杂的课题计算．我们曾和电力部华东电力设计院、中南电力设计院、西北电力设计院合作，共同开发了：1）冷却塔稳定性分析程序，随后又改进考虑支柱对稳定性影响的程序；2）考虑基础环，支柱与塔筒一体化的结构分析程序；3）考虑施工需要冷却塔在缺少一根或一对支柱时应力分析程序；4）考虑弹性体基础上的冷却塔静力分析与地基不均匀

下沉的程序等．所有这些工作，大部分有实验验证，说明计算结果可以作为设计的依据或参考．

§4 对未来的展望

随着国家经济的发展，电力建设也在相应地发展，冷却塔作为电力建设中的一项重要工程也面临新的要求．我们必须清醒地认识和迎接这种新的形势与新的挑战．这种新的形势的主要特点是：

（1）工业与民用对电力的需求增大，要求加快设计与施工的效率．因之研究与采用计算机辅助设计，使冷却塔设计从工艺到结构尽快地人机交互式地完成，采用无图纸设计与施工已成为现实．在部分环节上虽已实现了计算机化，但从整个设计流程来讲还有潜力可挖．在施工方面，研究与改进施工方式，以及施工过程中精度控制，受力分析以及稳定性分析是十分必要的．

（2）由于发电厂单机容量的增大，冷却塔也愈益向高大方向发展．因之研究新的高度大塔所面对的新问题日益显得复杂．在小塔方面认为不重要的问题，对于大塔却变得尖锐起来了．例如，地震力对于小塔不重要，面对大塔就相对重要了．地基的不均匀性对于大塔也显得更为重要了．同样，施工缺陷的影响、地震反应的时程分析、地基的不均匀下沉、风震问题、风震作用下的稳定性问题等等都是冷却塔变大后面临的新的

问题．在研究工作上要早看几步棋，提前组织力量进行研究．

（3）冷却塔优化设计的研究.冷却塔从本世纪初问世后，从外形到结构都没有多大变化，不同的是几何尺寸愈来愈大，淋水面积相应地增大．现在世界上最高的冷却塔已超过 170m，我国冷却塔高也超过 150 m.由此产生的问题是：这样高大下去是否划得来？一般说冷却塔高大了，成本也就大，而且由于技术难度以及风载随高度的指数变化，投资大体上也是随高度指数增加的．因此到某一大小之后，很自然会产生建一个大塔不如建两个小塔合算的问题．这就应当采用整体优化设计以及相应的一系列技术措施．对于单塔也一样，母线是什么曲线热效率最好，是至今还没有解决的冷却塔设计的基础性的问题．至于冷却塔结构设计的优化也仍没有充分研究，可以说仍是空白．因此，从省成本、安全、热效率各个角度来说，研究冷却塔优化设计问题已经提到日程上来了．

（4）冷却塔结构的非线性问题．冷却塔的厚度很小，无论从静力还是从动力分析的角度来看，非线性问题是迫切的．在风载作用下冷却塔顶部的位移可以达到数十公分，超过了厚度的数倍，这在数量上早已超出了线性理论的适用范围．线性问题要求位移比厚度小很多，传统设计中采用线性问题近似，在塔小时相差不会很大，对于大塔，这种误差会变得不可忽略．

为了考虑非线性效果，在塔变形时引起的风压变化也将成为不可忽

略的因素．何况这个风压的变化可以与变形耦合产生积累．在非线性动力学分析的过程中，这种因素是不能略去的.

值得注意的是，近20年来，全世界从各个自然科学与技术部门都提出研究非线性问题，形成了全球范围内的非线性热，并且已取得了不少重要进展．冷却塔结构作为一类特殊的非线性问题，有着它特有的难度．但我们相信，借助于世界性的非线性研究成果，借助于近年来计算机取得的进展，立足于日益需要提高冷却塔结构分析的精度，这方面的研究会取得对实际有意义的进展的.

冷却塔的发展，既要考虑当前的设计施工，又要考虑本来的需要与发展．如果能在上述这些紧迫问题中，选择一、二个问题安排力量进行研究，做出有实效的结果，就有可能使我们的事业有所前进.

参考文献

1 北京大学团体力学教研室．旋转壳的应力分析．北京：水利电力出版社，1979

2 北京大学力学系建筑空气动力学组.在大气边界展气流中双曲线型冷却塔风压分布的实验研究．中国力学学会第二届全国流体力学学术会议论文集

3 陈健等，旋转壳及附属结构应力分析软件系统，计算结构力学与其应用，1995 13（3）

4 Proceedings of the 3rd International Symposium on Natural Draught

Cooling Towers, Paris, April, 1989

刊登于《力学与实践》1996 年，第 18 卷，第 6 期，第 1——5 页

21 关于地震容易弄错的两个概念

汶川地震造成了巨大的破坏，所以引起了普遍的关注。不过从许多文章和谈论中，可以看出，有些人对于地震有两个概念没有搞清楚。

第一是把地震的震级和一个地方的地震烈度没有分清楚。其实这是两个不同的概念。

震级是表示一次地震大小的概念。现在是以这一次地震所释放的总能量来度量的。最早的震级标度是由美国地震学家里克特(C．F．Richter)于 1935 年研究加利福尼亚地方性地震时提出来的。它是以一个标准的测振仪在距离震中一定的条件下，测得的数据为标准，具体规定以距震中 100km 处“标准地震仪”(或称“安德生地震仪”，周期 0．8 秒，放大倍数 2800，阻尼系为 0．8)所记录的水平向最大振幅(单振幅，以微米计)的常用对数为该地震的震级。后来，通过不断发展，根据远台及非标准地震仪记录的换算也可以用来确定震级。目前用里克特方法测算的已知的最大震级为 8．9 级。根据里克特在 1953 年提出的公式计算，每一级地震释放的能量都是次一级地震的 31.7 倍。这意味着，里氏震级每高出 0.1 级，就会多释放出 0.412 倍的能量。

2008 年 5 月 12 日的汶川地震，最早公布的为 7.6 级，后来改为

7.8 级，最后定为 8.0 级，是因为测震点不会恰好在距震中 100km 处，所用的仪器也不一定是标准地震仪，在换算中会有差别所引起的，最后公布的显然是参考了较多地点测量结果综合计算得到的。美国公布的是 7.9 级。

一次地震，所引起的破坏程度，以震中为最强烈。随与震中距离增加，破坏程度会逐渐降低。为了度量一次地震对不同地点的破坏程度，又制定了一个地震烈度。一次地震，对于不同的地点烈度是不同的。就拿汶川地震来说，震中的具体位置是在北纬 31.015，东经 103.365，这个位置在理县耿达到汶川县的映秀镇之间。在都江堰、汶川、成都、重庆等不同的地点，会感觉到不同的地震烈度，其破坏程度也就不一样。地震烈度分为 12 级。最早是以地震时地面的最大水平加速度来度量的，具体是烈度为 7 度时地表水平加速度为重力加速度的 1/8 每提高一度，加一倍。后来发现单纯用加速度不足以刻画破坏程度，因为当振幅很小时，加速度即使很大，破坏性也不大，所以后来又加入了水平振动的峰值速度。我国现使用的地震烈度表附后。一个地点的地震烈度既和震级有关，又和距离震中的距离有关。其间虽然有各种近似估计的公式，但最后评定每一个具体地点的地震烈度，还得要靠具体调查该地的震后破坏情况来定。

震级、发震时间、地点。这是地震预报要给出的三要素。要三要素

完全准确无误地预报出来的确是地震预报迄今还在继续研究的难题。

第二个容易弄错的概念是，结构抗震的设防烈度。由于没有把震级与烈度分清楚，所以便误以为，在结构设计中的设防烈度，误以为是震级。例如名人余秋雨在《含泪劝告请愿灾民》中说：“已经有好几位国际地震专家说，地震到了七点八级，理论上一切房屋都会倒塌，除非有特殊原因，而这次四川，是八级！”这就没有把震级与烈度分清楚。落下一个笑柄。有的人还说：“由于汶川建筑设防是 7 级，这次地震是 8 级，所以房屋都倒塌了。”与余秋雨犯的是同样的错误。

国家建筑规范上对某个地区给了一个设防标准，是针对地震烈度来说的，而不是针对震级。它是根据当地有关地震的历史资料和今后发生地震的可能性综合评定得出的。具体说四川的绝大部分地区的地震设防标准是 7 度。

连带的一个错误就是，认为地震烈度超过了设防烈度，建筑物会全垮掉。实际上，设防烈度是指建筑物在给定的烈度下，还可以照常使用或稍加修理就可以使用。对于一般房屋建筑，规范要求：“多遇地震不坏，设防地震烈度可修和罕遇地震不倒”。像汶川那样的 8 级地震，在震中的地震烈度一般会达到 11 度，而随距震中距离加大，烈度会很快减小，损失也会逐渐减小的。而不是如余秋雨说的：“地震到了七点八级，理论上一切房屋都会倒塌，除非有特殊原因，而这次四川，是八级！”

话又说回来，是不是地震烈度达到 10 度或者如汶川地震的震中，达到 11 度，是否房子就一定会全倒塌呢。实际表明还是会有一些房子留存下来的。而要求在很强的地震烈度之下房屋不垮，即使结构破坏了，也至少要给人留出足够的生存空间，这正是抗震结构要研究的课题。

《中国地震烈度表》

烈度	人的感觉	一般房屋		其它现象	参考物理指标	
		大多数房屋震害程度	平均震害指数		加速度(CM/S2)（水平向）	速度/(CM/S2)（水平向）
I	无感	/	/	/	/	/
II	室内个别静止中的人感觉	/	/	/	/	/
III	室内少数静止中的人感觉	门、窗轻微作响	/	悬挂物微动	/	/
IV	室内多数人感觉，少数人梦中惊醒	门窗作响	/	悬挂物明显摆动，器皿作响	/	/
V	室内普遍感觉，室外多数人感觉，多数人梦中惊醒	门窗、屋顶、屋架颤动作响，灰土掉落，抹灰出现微细裂缝	/	不稳定器翻倒	31（22-44）	3（2-4）
VI	惊慌失措，仓惶逃出	损坏——个别砖瓦掉落、墙体微细裂缝	0-0.10	河岸和松软土上出现裂缝，饱和砂层出现喷砂冒水，地面上有的砖烟囱轻度裂缝、掉头	63（ 45-89）	6（5-9）
VII	大数多人仓惶逃出	轻度破坏——局部破坏、开裂，但不防碍使用	0.11-0.30	河岸出现坍方，饱和砂层常见喷砂冒水，松软土上地裂缝较多，大多数砖烟囱中等破坏	125（90-177）	13（10-18）
VIII	摇晃颠簸，行走困难	中等破坏——结构受损，需要修理	0.31-0.50	干硬土上变有裂缝，大多数砖囱严重破坏	250（178-353）	25（19-35）
IX	坐立不稳，行动的人可能摔跤	严重破坏——墙体龟裂，局部倒塌，修复困难	0.51-0.70	干硬土上有许多地方出现裂缝、基岩上可能出现裂缝、滑坡、坍方常见，砖烟囱出现倒塌	500（354-707）	25（19-35）
X	骑自行车的人会摔倒，处不稳状态的人会摔出几尺远，有抛起感	倒塌——大部倒塌，不堪修复	0.71-0.90	山崩和地震断裂出现，基岩上的拱桥破坏，大多数烟囱从根部破坏或倒毁	1000（708-1414）	100（72-141）
XI	/	毁灭	0.91-1.00	地震断裂延续很长，山崩常见，基岩上的拱桥	/	/
XII	/	/	/	地面剧烈变化，山河改观	/	/

22 谈 规 范

人们经常用的用具和遇到的设施，久而久之，就会趋同形成一种大致同一的尺寸。例如常用的筷子，通常是 7.6 寸长，再例如家常的门，一般是高 2.1 米，再高不过 2.4 米，低不会低于 2.0 米。最后它们就形成统一的标准。

社会生活是多方面的，于是就形成多种多样的标准。为了便利于社会生活，国家行政有关部门就把这些需要制定标准的方面管理起来，所以每个国家都有标准局，主管制定和推行标准，而且每隔几年要根据情况的变化和新的经验进行修订。这些标准有时称为规范。

在现在社会中，建立和遵守标准是社会现代化的重要标志。人们把建立和推行标准称为标准化。它影响人们生活的方方面面。例如度量衡标准、例如计时标准、汉字标准、工程制图标准、机械中的螺丝螺母标准等等。如果没有或不遵守这些标准，社会生活就会不方便或混乱无序。我们国家已有的国家标准（GB）达两万多项。

结构设计既然也是一种频繁重复工作的行当，所以也会形成标准。与结构有关的标准文件统称为规范。在国家标准中，与结构设计有关的

规范大约有一百多项。它们是建筑荷载规范、钢结构规范、钢筋混凝土规范、建筑抗震设计规范、预应力混凝土结构规范、以及有关烟筒、管道特别结构的规范等等。

对于结构的设计人员来说，结构规范至少能够起三种作用。第一，由于结构设计中有许多常常要重复的工作，例如甲设计了混凝土楼板，不久乙又要设计混凝土楼板，那么规范上规定的楼板的载荷、楼板的配筋比就不需要从头研究收集资料了。所以熟悉规范能够使设计人员提高效率、节省人力。第二，规范给设计人员一种合理的约束，能够极大地避免设计错误，从而减少损失。国家规范对于设计人员来说就是法律，在设计中必须遵守。第三，规范给了设计合格与否的标准，在验收和审查一项结构设计时，最为重要的是看设计是否遵守了各种结构设计规范。如果，各方面都是合乎规范的，就认为结构设计是合格的。当然，合格的设计不一定是最好的设计。规范并不约束设计人员的创造力，而是给你发挥创造力的一个基础。

对于一个设计工程师来说，熟悉各种结构规范是首要的事情。在各种结构规范中，最重要的是荷载规范、钢结构规范和钢筋混凝土规范。下面我们就建筑结构的荷载规范来简单介绍它给了我们那些要求。

荷载规范将建筑结构上的荷载分为三类，这就是：

永久荷载：结构自重、固定设备重等；

可变荷载：可移动设备、人、雪荷载、风荷载等；

偶然荷载。

现在我们举一个楼面的荷载计算作为例子，看荷载规范给了我们那些规定。

首先要计算永久荷载，也就是楼板的自重。楼板是由钢筋混凝土（比重 25kN/㎥，厚度 10cm）、水磨石（比重 17kN/㎥，厚度 2cm）与打底的砂浆（0.65kN/㎡）构成。

所以楼板的永久荷载的标准值应为：

0.65+25×0.10+17×0.020=0.65+2.5+0.34=3.49kN/㎡。

按照规范规定，这个永久荷载的标准值在设计时，最大可以乘以 1.2 倍，这是考虑到各种材料的比重会有误差，有的会比标准比重大一些，还有在内装修时地板的加厚。于是楼板的永久荷载设计值可以是：3.49×1.2=4.188kN/㎡。

根据荷载规范，楼板的可变荷载标准值是：2.kN/㎡。规范又给出，在设计时估计实际使用时可能超出这个标准值，所以最大可以乘以 1.4 作为实际设计值。于是楼板的可变荷载设计值可以是：2.0×1.4=2.8kN/㎡。

把上面的两项设计值相加，我们就得到楼板荷载的设计值取：

4.188+2.8=6.988kN/㎡。

总结上面对于楼板的设计荷载, 可以归纳为：

设计荷载=1.2 永久载荷+1.4 可变荷载。

对于楼板自身的强度计算来说，考虑如上的设计荷载也就够了。但对于整座建筑结构来说还有许多因素要考虑。

这时，就要把荷载分得更细些。例如把可变荷载分为可移动荷载与风载。于是在设计整座楼房时，就至少需要考虑以下两种荷载的情形，即

设计荷载（1）=1.2 永久荷载+1.4 可移动荷载

设计荷载（2）=1.2 永久荷载+0.7 可移动荷载+1.3 风载

第二种情形的可移动荷载乘以 0.7，是考虑风载最大的时候，可移动荷载并不一定是最大。

对于楼房结构设计考虑的不同的荷载情形称为“工况”。上面提供了两种比较典型的工况。对于比较复杂的结构在设计的时候，需要考虑的工况有很多。例如对于比较重要的桥梁结构就需要考虑永久荷载、可移动荷载、风载、桥墩被船撞击的荷载、桥栏杆被车冲撞的荷载等等以及它们不同比例组合的工况。有些工况规范上没有给出数据，就需要进行研究后确定。

总之，一名好的设计工程师，既要熟悉有关设计的规范，又要在它约束的范围内充分发挥创造性，使设计的结构强度可靠、便于施工、经久耐用、造型美观、节约建造与维护的投资。设计工程师还要有一定的

理论储备，在规范没有规定的某些情形能够根据基本理论推断应当采取的措施，或者组织研究。

23 复合材料

近年来，复合材料（composite material）这个词用得多了起来。那么什么是复合材料呢？简单说，复合材料是由两种或多种不同的的材料组合而成的材料。其中的一种材料作为基体，其它的材料作为增强相，基体通常是连续的，增强相可以是颗粒、纤维、层板。可以认为增强相是镶嵌在基体里的。这种组合成的材料的性质与它的任何一种成分的材料都显著不同。

复合材料中各种材料在性能上互相取长补短，产生协同效应，使复合材料的综合性能优于原组成材料而满足各种不同的要求。复合材料较以往的材料能够具有许多优点：高的强度重量比、高抗疲劳性和耐腐蚀性、增强的耐摩擦和耐磨损性、低导热系数和低热膨胀系数、材料属性具有可调整性以满足设计要求。例如陶瓷材料有耐高温的优点，但是它比较脆，为了增强它的韧性，采用高强度、高弹性的纤维与陶瓷基复合后，这种复合材料就可以用作液体火箭发动机喷管、导弹天线罩、航天飞机鼻锥、飞机刹车盘和高档汽车刹车盘等，成为高技术新材料的一个重要分支。

复合材料使用的历史可以追溯到古代。从古至今沿用的稻草增强粘土，用石灰沫墙其中掺入麻刀和头发以防开裂，已使用了上百年的钢筋混凝土，制造家具的层合板，加有高强度纤维线的橡胶轮胎。它们都是由两种或两种以上的材料复合而成。我们现在所说的复合材料当然不是

指这些，而是指二十世纪 40 年代以后发展起来的新的复合材料，有时称为先进复合材料。

20 世纪 40 年代，因航空工业的需要，发展了玻璃纤维增强塑料（俗称玻璃钢），从此出现了复合材料这一名称。20 世纪 50 年代以后，陆续发展了碳纤维、石墨纤维和硼纤维等高强度和高模量纤维。20 世纪 70 年代出现了芳纶纤维和碳化硅纤维。这些高强度、高模量纤维能与合成树脂、碳、石墨、陶瓷、橡胶等非金属基体或铝、镁、钛等金属基体复合，构成各具特色的复合材料。

在这种新的复合材料出现以前。人类所用的结构材料，有如下三类：

金属材料：钢铁、铝与铝合金、铜、镁、钛等；

无机非金属材料：砖、瓦、玻璃、陶瓷、水泥、石墨、碳等；

高分子材料：橡胶、树脂、塑料、纤维 、粘合剂、涂料等。

现在出现的第四类材料——复合材料，就是以上三类材料复合而成的材料。以上三类材料都可以作为复合材料的基体，也都可以作为增强相加入基体中。

关于复合材料，最重要的，有一下三方面的问题需要研究。

首先，是复合材料的组成、构造与加工问题。选取的基体是什么、增强相是以什么方式加入基体的以及增强相自身的分布和编织方式、如何加工和实现这种复合材料。

复合材料的构成结构是多种多样的，如下面图示，有增强体无规则分散的，有纤维单向增强的、有以层合板的形式叠加的、有夹层结构的、有三维编织的等等，不一而足。而且还会研究发展新的构造形式。如下

图 1-4

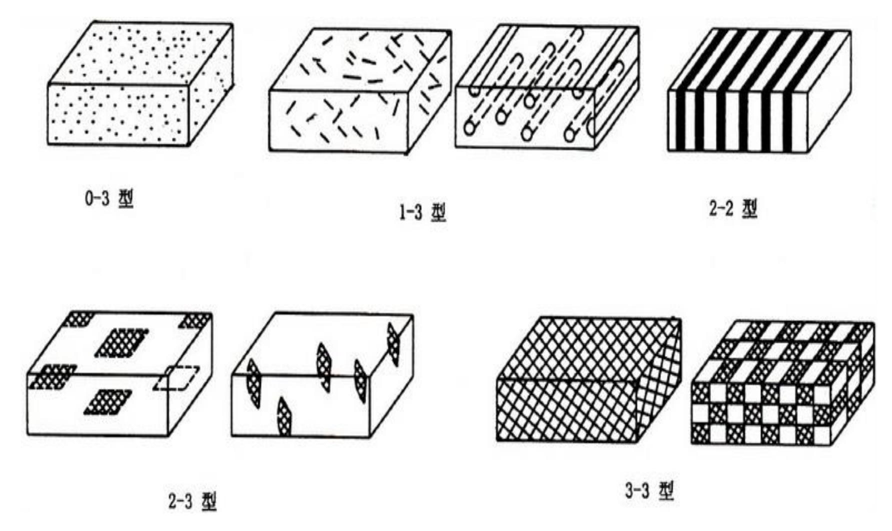


图 1 增强体的各种分布方式

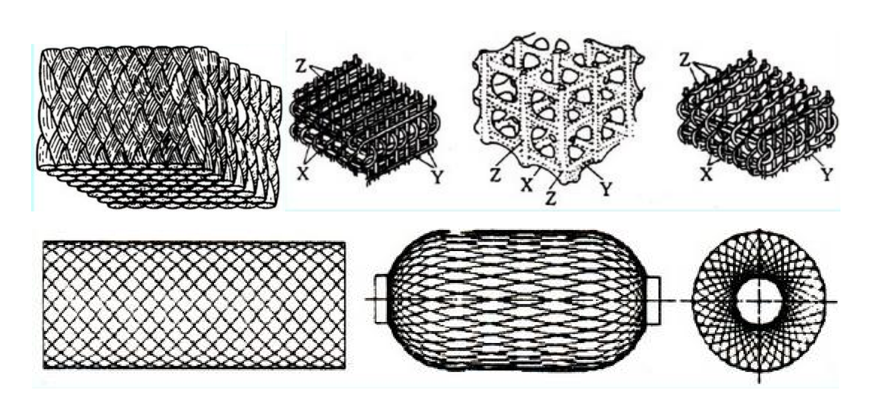


图 2 增强体的各种三维编织形式

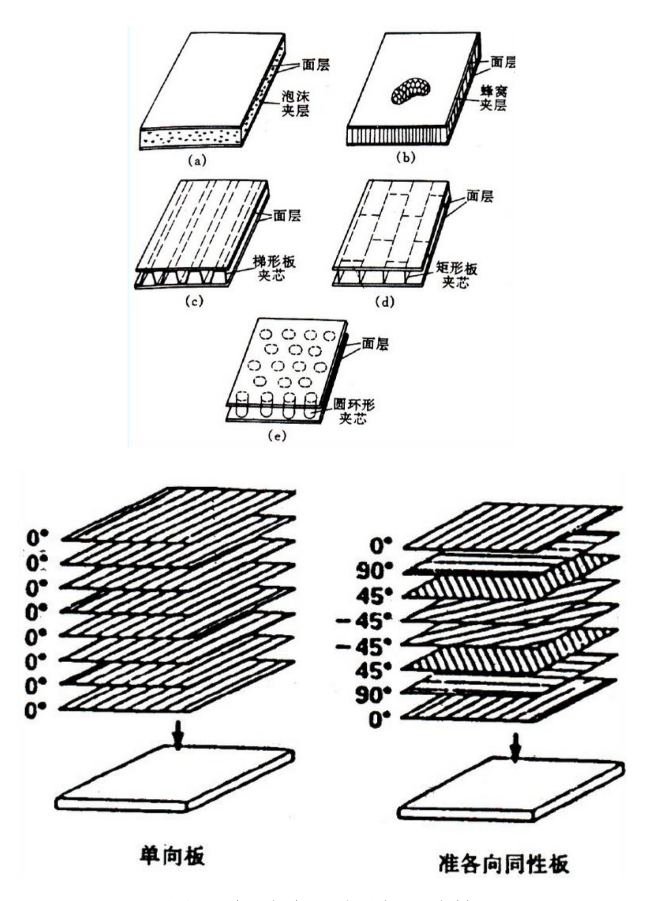


图 3 各种夹层与铺层结构

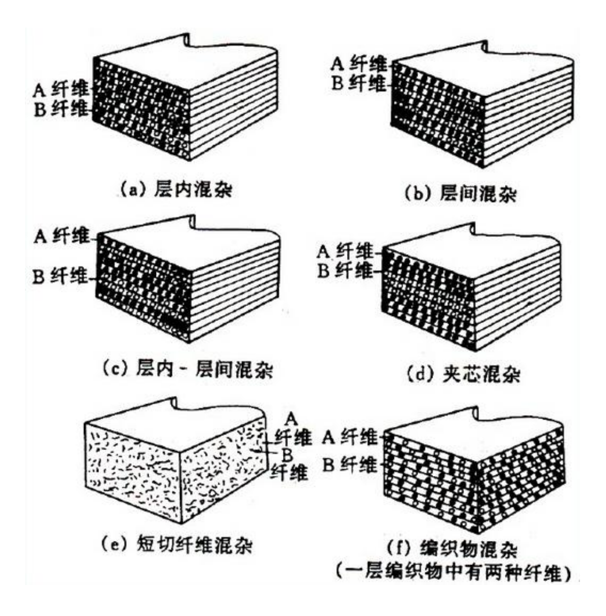


图 4 混合形式结构

在复合材料加工中需要特别说明的是，复合材料加工经常是一次性的制成结构成品。以往的材料生产和结构建造是分开进行的。而复合材料工程多是将两个步骤合成一步。图 5 所示汽车外壳是由复合材料制成的，两个人就能够抬起来，可见它是很轻的。它是一次性由制作复合材料制成。下边的飞机机身也是一次性制成的。





图 5 复合材料制成的汽车外壳和机身

其次，是复合材料的设计问题。由复合材料组分的力学性质和复合材料的构造形式如何计算出复合材料的整体力学性质和承载能力。这是复合材料力学的关键问题。换句话说，只有这件事情能够自由了，设计优秀的复合材料才能够达到自由的程度。

由于复合材料的多样性和复杂性，所以很难有一种方法对所有符合材料都有效。经常是针对不同的复合材料构造研究和发展必要的设计和计算方法。例如层合板的复合材料计算方法、纤维增强复合材料的计算方法等等。这方面的文献和书籍已经非常多，在遇到这类问题时需要查

阅有关的文献。

在具体计算复合材料结构时，可以首先选择有代表性的微小单元，通过计算取得这个单元平均化后的应力应变关系的各种参数，然后在得到的微元平均化后的应力应变关系下，计算复合材料结构的整体响应。最后在根据得到的平均化的应力与应变，在每个微元上计算复合材料各个组分的应力应变和界面上的应力分布。最后做出结构强度的判断。

由于复合材料的复杂性，所有关于复合材料的计算与设计，需要借助于计算机进行。好在现在有不少固体力学，包括针对复合材料的计算力学商用软件可以使用。尽管如此，对复合材料力学的研究仍然需要投入巨大的人力物力。

最后，是复合材料中各组分之间的界面问题。

复合材料既然是由两种或两种以上的材料复合而成的，所以组分直接的界面就显得特别重要。如果界面之间粘合不紧，那么组分之间没有合作，各是各。就会看不到多种材料合起来的优点反而性能会降低。但是界面的结合并不是简单的问题，研究复合材料界面行为，可以说是研究复合材料机理的关键问题。

一般说来，两种材料之间的界面并不是一张理想的曲面，而是有一定厚度的两种材料交互存在的立体。在其间会产生各种变化。主要的是引起各组分之间相互浸润、扩散、界面相容、界面自由能互相穿透的物

理变化；导致界面上化学反应，产生新的物质形成新的界面层的化学变化；界面上的应力分布。由于界面上有这许多复杂的事情，所以有时在进行复合材料加工之前先要对界面进行处理

从力学的角度很关心界面的粘接牢度以及界面在什么条件下开裂的问题。乃至界面开裂问题已经成为计算力学和复合材料力学一类十分受关注的课题。

复合材料兴起虽然只有半个多世纪，但是已经取得令人瞩目的成就。他在改变着许多高技术结构的面貌。因此它是国际上激烈竞争的高技术领域之一。谁在这种高技术领域占上风，就可能在航空、航天、国防上领先。有能力的力学家们，到复合材料中显一下身手吧！

2021, 3, 10

24 沃尔夫定律

恩格斯在《自然辩证法》中说："数学的应用：在固体力学中是绝对的，在气体力学中已经比较困难了，在物理学中多半是尝试性的，在化学中是最简单的一次方程式，在生物学中等于零。"

恩格斯的这本书是写于 1873 至 1886 年之间的。他所说的"固体力学"实际上应当指的是刚体和质点力学。在他的时代按照通常的理解，连续介质力学，包括流体力学和现今所称的固体力学，是属于物理的领域，当时流体力学的纳维-斯托克斯方程刚提出不久，弹性力学也没有太丰富的内容，所以恩格斯认为"在物理学中多半是尝试性的"。

在生物学中，当时数学的应用虽然比起力学来说要少，但也并不就是零。孟德尔宣读自己关于豌豆遗传实验的统计结果的时间是 1865 年。伽利略 1638 年出版的《关于两门新科学的对话》中已经用相当准确的语言论证了："身体愈小，它的相对的强度就愈大。因此一只小狗也许能够在它的背上携带和它一样大的两只或三只小狗，但是我相信一匹马甚

至驮不起和它大小一样的一匹马。”更不必说丹尼尔·伯努利在1738年出版的《流体动力学》所阐述的精密流体力学中的第一个普遍原理，伯努利定律，就是从研究血液的流动和血压的关系中得到的。而1840年泊萧叶发表的《流体通过细管运动的实验研究》，论文说明在圆形管道中流体的流速是按照半径的抛物线规律分布的，这是管道粘性流体力学的第一个准确解，也是从仔细观察血管中血液的流动中得到的。而后面这两篇著作，既是生理学的经典著作，也是力学的经典著作。

力学是和数学结伴而生并且携手成长和发展起来的学科。尽管从19世纪中叶，大约就是从恩格斯写《自然辩证法》的那个时代起，在哲学界，就不断兴起对自然科学中的机械论和还原论的讨伐，并且为力学的发展划定了一定的范围，力学的研究者不可越雷池一步。但是，用数学力学的方法研究天体、研究化学反应、研究地质、研究气象和天气预报，乃至研究生物，都在不断发展并且不断取得辉煌的成果，历史的发展表明力学的研究是在不断扩大自己的范围，从未受那些批判和限制的影响。

我们在这里要介绍的是，在 19 世纪后半叶逐渐明朗起来的关于生物学和力学的密切关系，也就是生物力学发展比较早期的一个重要定律的形成过程。这就是以沃尔夫命名的沃尔夫定律。沃尔夫定律指的是：骨在需要的地方就生长，在不需要的地方就吸收。即骨的生长、吸收、重建都与骨的受力状态有关。是十九世纪德国的外科医生朱利叶斯•沃尔夫（Julius Wolff， 1836 - 1902）的重大发现。后来被称为沃尔夫定律。

§1 两位隔行名家的交往

俗话说“隔行如隔山”。是说，不同行的人之间很少交往。我们这里却说的是两位不同行的名家的交往。他们是生理和解剖学家迈尔（Georg Hermann von Meyer，1815-1892）[1]和结构力学家和土木工程师库耳曼（**Carl Culmann** ，1821 – 1881)。他们二人都出生在当时的德国，后来都到瑞士的苏黎世当教授。迈尔是在苏黎世大学的解剖学院教学，后来当上了医学院的院长。而库耳曼从 1855 年成为瑞士工学院（Swiss Federal Institute of Technology, Zürich）工程科学的主持人。

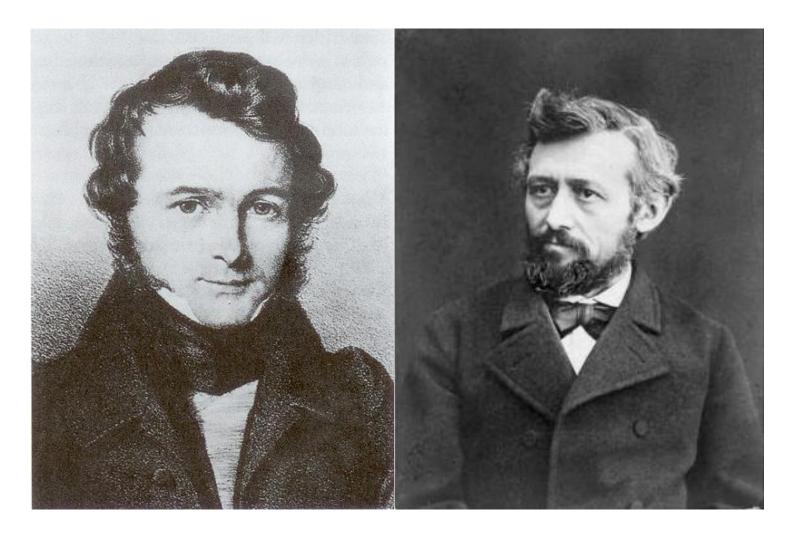


图 1 迈尔与库耳曼像

苏黎世有一个自然科学协会（Society for Natural Science，Zurich），这两位于 1866 年都参加了这个协会。从此交往便多起来，并且相互产生了很深的影响。

库耳曼在 1866 年出版了一本重要著作《图解静力学》（Graphical Statics），这是一本大学教科书，书中根据他以往的学习经验和独立研究得到的关于用图示的方法来计算结构的受力分析。特别是，他发展了一套分析结构中主应力轨道的方法，用来揭示应力在固体内传递的过程。下图就是他解释悬臂梁的主应力轨道的一幅插图。瑞士工学院成立于 1854 年，库耳曼是该校第一个土木工程方面的教授。他被誉为工程中图形法的先驱，影响了整个一代工程师。他的杰出学生中有莫尔（**Christian**

Otto Mohr , 1835 –1918)，以提出材料力学中莫尔圆和改进求解超静定结构的力法而著名，有柯什林（**Maurice Koechlin** ，1856- 1946)，他受雇于埃菲尔公司部，以协助埃菲尔进行巴黎埃菲尔铁塔的结构设计而出名，在设计中使用了由库耳曼总结的图解法。

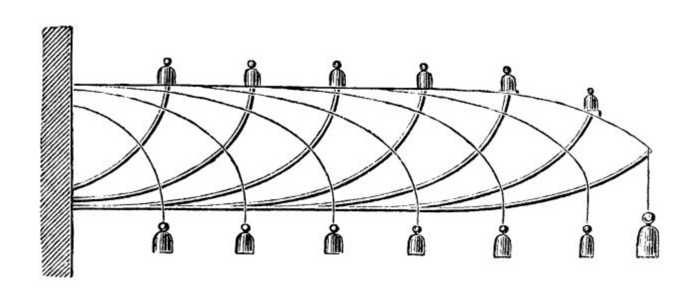


图 2 库耳曼关于悬臂梁的主应力轨线

1867 年迈尔发表了一篇很重要的论文《海绵状结构》（Architectur der Spongiosa）[2]，他发现骨头的微细承力部分是一种海绵状的结构。论文说不同的骨骼乃至同一骨骼的不同部位的结构是有区别的。文中他强调与库耳曼讨论对于他得到这些结果的作用。他描述当他表达人体大趾和后跟形成的脚拱的骨小梁结构时，库耳曼建议图样应当是按照由于外載而产生的主应力轨道来分布的。迈尔和库耳曼对人的大腿骨的上端的骨小梁结构与一个弯曲的、起重机样的、无回转的实体的单腿受力条件下的大腿模型由数学计算得到的主应力轨道进行了对比。后面的这种假想的结构，人们称之为库耳曼起重机，后来有人真的按照他提供的主应力轨道做出了一架实际的起重机。迈尔说，除了外力之外，还有一些因素

对骨骼有影响，如截面的分布、肌肉和韧带的机械影响，都能够解释和修正骨小梁系统的分布。

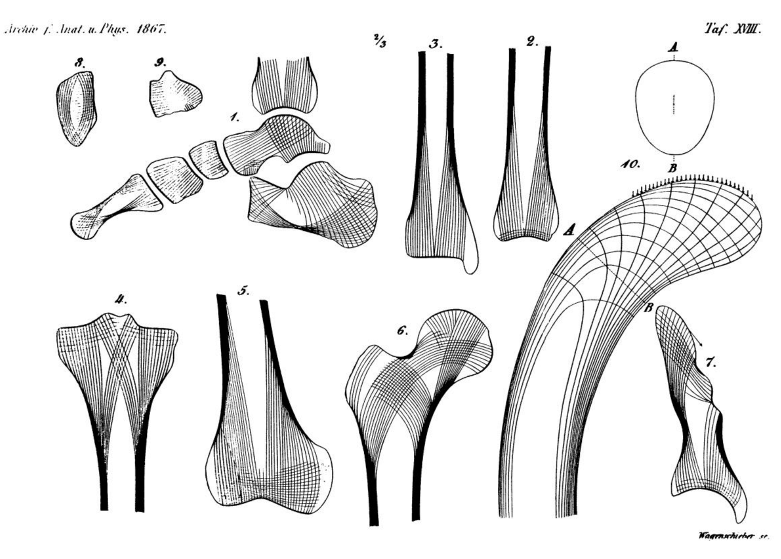


图 3 迈尔论文的插图

其实，迈尔在与库耳曼相遇之前，1661 年出版过一本通俗小册子《为什么鞋子会夹脚》（Why the Shoe Pinches），在迈尔的著作和论文中经常是引用结构和力学的概念来处理问题。这本书是从脚的解剖以及行走受力的角度来讨论舒适的鞋子的式样。并且讨论了由于鞋子不合适导致的脚变形，诸如拇趾外翻等毛病。这其中就有一种朴素的力学方面的思考。在与库耳曼交流后，迈尔的解剖学就进一步和力学知识相结合，达到了一个新的高度。1883 年他又出版了一本通俗小册子《语言的器官》（The Organ of Speech），书中对语言的发声和共鸣器官进行了解

剖学上的仔细讨论。他在序言中说："这本书将激起所有的受过教育的人的兴趣，特别是引起那些从事语言学研究以及全部音乐家的兴趣。"

库耳曼则从交流中获得由解剖学带来的灵感，把它用于结构设计。他认为骨骼上的每一个小的单元格都不会是混乱无序的，它们都分别承担总体结构所要它承担的一块砖石的作用。他的学生柯什林在设计埃菲尔铁塔结构时，在铁塔基部的桁架构造上就是按照库耳曼起重机的主应力轨迹来布置桁杆的。这被后人引述为仿生学最著名的案例。即开始了人类在工程建设中自觉地模仿生物的器官和结构的某种功能，作为仿生学的开端。

§2 沃尔夫的工作

迈尔 1867 年的论文发表后，并没有引起多少人的注意。这可能一方面是由于迈尔没有进一步给出通俗的解释，另一方面是由于当时的生理学和解剖学的学者缺少力学知识。不过他的结果却引起了一位年轻的外科医生的注意。他就是沃尔夫。

1869 年沃尔夫见到了迈尔，向他请教了一些问题，并且获赠了迈尔的论文。此外，他还拜访了一些有名的力学家，如库耳曼和他的学生莫尔。1870 年沃尔夫发表了一篇论文《骨头的内部结构和对于骨头转换的重要性》[3]。论文继承了迈尔的分析方法。沿着迈尔的论文[2]做进一步

的探讨。他首先说：迈尔的工作“并没有引起足够的重视。而我看来，它也许是在生理学中迄今最异乎寻常的发现。因而这是一个恰当的时机去唤起对迈尔的发现的重视并沿着它进行研究，这也许是我的责任。”



图 4 沃尔夫像

沃尔夫后来集中精力与人体大腿骨上端的力学与内部结构的研究。他说：“这是由于我异常高的兴趣所在以及去填补迈尔研究的空隙的必要。”沃尔夫的这篇文章篇幅有六十多页。仔细介绍了大腿骨的剖面和内部结构。他不仅接受了库耳曼关于主应力轨道的概念，而且具体发现和进一步研究了沿主应力轨道分布的骨内部结构。他还发现，在腿骨中部的外层骨质比较密实的部分，愈到顶端愈变薄，最后完全消失。沃尔夫认为，在腿骨的中部，其承力作用比较接近一根梁，所以比较密实的

骨质分布在骨头的周边。而接近腿骨的端部，受力比较复杂，并不只是简单地受拉伸和压缩。还会有剪应力。而且由于人的姿势的变动，受拉伸和压缩部位和方向也在变动，所以骨头的构造就由分散的内部骨小梁来承受。

他在论文结束时阐述了这样的观点，当在正常的受力条件下骨质切除后，还会恢复原来的骨结构，对于一个佝偻病人的骨头，当恢复正常时，他的骨质结构也会恢复正常。看来当骨头不再受弯曲时，它的骨小梁就会消失。遵照这种想法，他开展了整形外科的手书，成为德国较早的整形外科医生，并且使整形外科成为外科的一个新的门类。

经过二十多年的潜心研究和临床观察，到 1892 年沃尔夫发表了他最重要的著作《骨转换的定律》（Das Gesetz der Transformation der Knochen. August Hirschwald, Berlin）[4]。

在这本书中沃尔夫阐述了骨骼生长和所受应力的关系。他说："人或者动物的骨骼受应力的影响，负荷增加骨增粗，负荷减少骨变细。骨折再塑过程的变化规律。骨折后如有移位，在凹侧将有明显骨痂形成，其内部骨小梁将沿着压应力的传递方向排列，而在凸侧将有骨的吸收。骨力求达到一种最佳结构，即骨骼的形态与物质受个体活动水平的调控，

使之足够承担力学负载，但并不增加代谢转运的负担。”

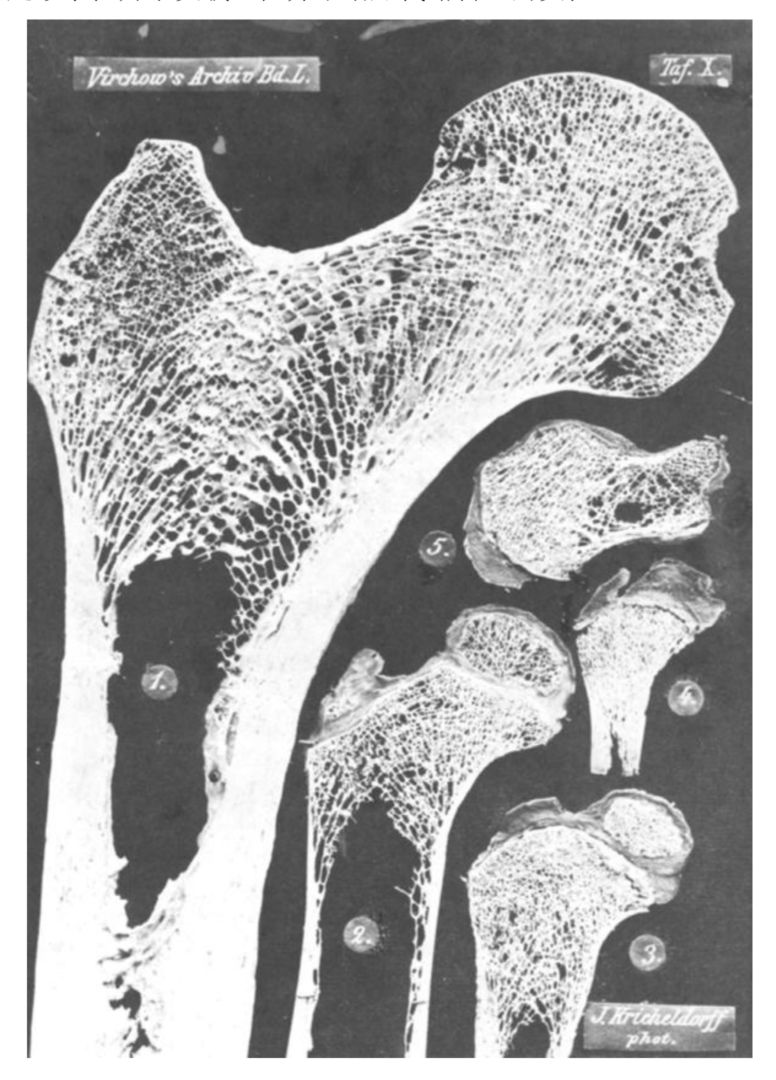


图 5 沃尔夫给出的大腿骨上端的剖图[3]

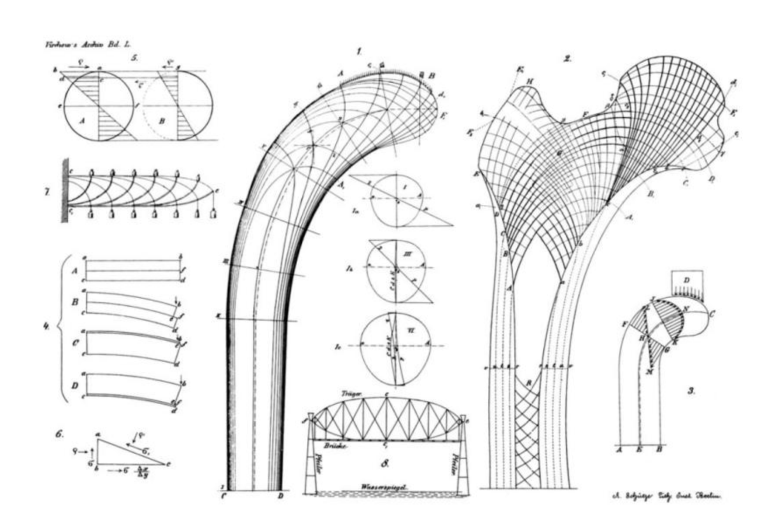


图 6 沃尔夫给出的大腿骨主应力轨道和实际骨小梁分布图及结构比拟[3]

右图取自沃尔夫的著作。人的股骨，在人体的各种骨骼中，所受的工况比较简单，所以沃尔夫主要以它为对象进行分析。结论表明骨密度和所受应力是密切相关的。沃尔夫还说：“骨骼重新形成的规律是一种数学定律，遵照它骨骼的内部结构和外

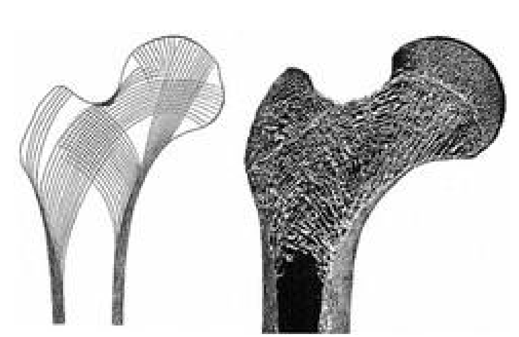


图 7 人的股骨的骨小梁的分布和主应力的方向是相合的

形的改变是骨骼所受应力变化的结果。”沃尔夫的这些论述，被后人概括为沃尔夫定律。

沃尔夫的著作，在很长的时间里很少有人注意。直到 1989 年才被翻译为英文。成为生物力学的经典文献。近年来的研究愈来愈证实他的结论的正确。例如宇航员在失重状态下，腿和脊椎内骨质损失速度为每月 2.7%，髋骨内骨质损失速度缓慢些，为每月 1.7%。在太空中待了三个月后，一些宇航员可能会出现肌肉萎缩，甚至会失去多达 30%的肌肉块。有的人回到地球上后还会出现骨折的严重问题。近年来有人把老年运动员和年龄相仿的一般老年人的腰椎骨的骨密度进行比较，发现老年长跑运动员的骨密度非常显著地高于一般老年人的骨密度，这说明运动不但使人骨增粗、皮质骨加厚，而且也使骨密度增高、关节活动灵活，能够承受较大负荷。对老年人来说，尤其是绝经后妇女可预防和少患骨质疏松症，减少老年人骨折发生率。

将沃尔夫定律用于骨折治疗上，以往对骨折的病人，主张病人减少活动，主张静止。由于有沃尔夫的研究，说明当骨骼承受荷载时生长比较快。所以现今主张骨折病人尽早活动。

与此相关联的，有人将沃尔夫定律拓广。得到人体或动物的肌肉和软组织也是，在承受外力的条件下会生长得强壮。沃尔夫定律，是把力

学与生命现象相联系的一个定律。尽管它的精确性没有像数学、物理和力学中许多定律那样精密。不过，由于生命现象的复杂性，能够有这样一个定性的定律，已经是经过许多年的观察和实验的总结。直到近年来它的进一步精确化和定量化仍然是人们研究所关心的热门问题。这类研究内容也成为一门新的学科-生物力学的主要内容。

沃尔夫定律的总结是和不同行业的学者相处和交流密切相关的。在现今多学科交叉和新的交叉学科不断涌现的情况下，提倡不同学科的学者交流和合作是很有意义的。科学不仅要师徒传承，更需要同行和不同行之间切磋才能发展。

参考文献

[1] John G.Skedros MD & Richard A. Brand MD, Biographical Sketch-Georg Hermann von Meyer(1815-1892),Clinical Orthopadics and Related Research,(2011)469:3072-3076

[2] Von Meyer GH. Die Architectur der Spongiosa. Reichert und Du Bois-Reymond’s Archiv. 1867:615-628.

[3] Julius Wolff， Über die innere Architektur der Knochen und ihre Bedeutung für die Frage vom Knochenwachstum. Virchow’s Archiv 50(3): 389-453

[4] Julius Wolff， THE ‘LAW OF BONE TRANSFORMATION’, Biological Reviews,Volume 66, Issue 3, pages 245–273, August 1991

25 椎间盘突出症和力学

著名剧作家沙叶新说到他妻子有下面一段话:我妻子生病,我和她开玩笑，我说：“你呀，一辈子平平淡淡，啥也不突出；退休之后倒突出了，可你突出的不是地方，腰椎间盘突出!”妻子气得呀直捶我。腰椎间盘突出很痛苦。医生说，如果躺着的时候，腰椎承受的压力是 0 的话，站着则是 1，坐着却是 8。所以这种病人是真正的坐立不安，只能静卧；尤其是不能坐，每天只能在床上水平地横着或在地上笔直地竖着，我说她现在过的是“横竖横”日子。“横竖横，拆牛棚”，很厉害，所以如今遇事我都让着她一点。椎间盘突出是这个病的学名，老百姓一般称为腰腿疼。因为它的直接症状就是腰和腿（一般是一侧）的神经疼痛。

说起来要了解椎间盘突出，还需要了解一点有关的力学知识。

下面这幅图画的是人的脊椎。有的书上管它叫脊柱，老百姓的口语中管它叫脊梁。到底是“脊柱”还是“脊梁”，一字之差，很是耐人寻味。

从力学的角度来看“柱”和“梁”虽然形状一样，都是一根柱体，由于它们所受的外力不同，就得到不同的名称。柱是承受轴向外力的，而梁是承受垂直于杆轴的外力的，亦即承受横向加载的外力的。

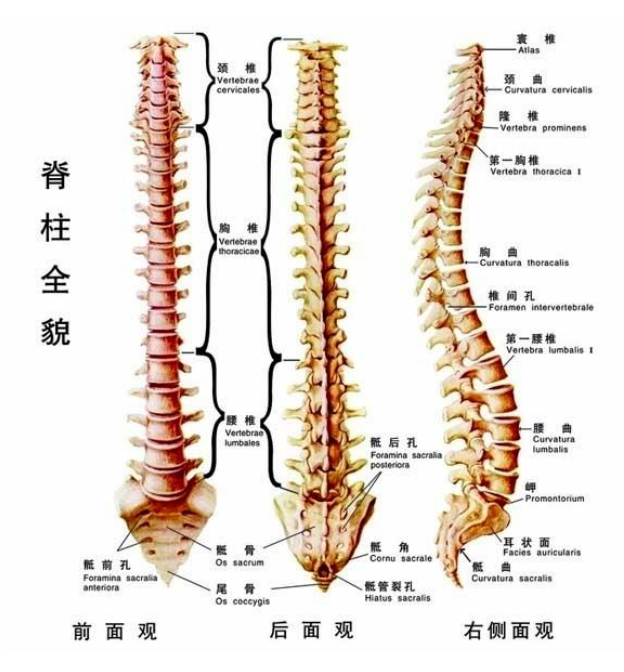

脊柱全貌
颈椎
Vertebrae cervicales
胸椎
Vertebrae thoracicae
腰椎
Vertebrae lumbales
骶前孔
Foramina sacralia anteriora
骶骨
Os sacrum
尾骨
Os coccygis
骶后孔
Foramina sacralia posteriora
骶角
Cornu sacrale
骶管裂孔
Hiatus sacralis
寰椎
Atlas
颈曲
Curvatura cervicalis
隆椎
Vertebra prominens
第一胸椎
Vertebra thoracica I
胸曲
Curvatura thoracalis
椎间孔
Foramen intervertebrale
第一腰椎
Vertebra lumbalis I
腰曲
Curvatura lumbalis
岬
Promontorium
耳状面
Facies auricularis
骶曲
Curvatura sacralis
前面观
后面观
右侧面观

图 1 脊柱

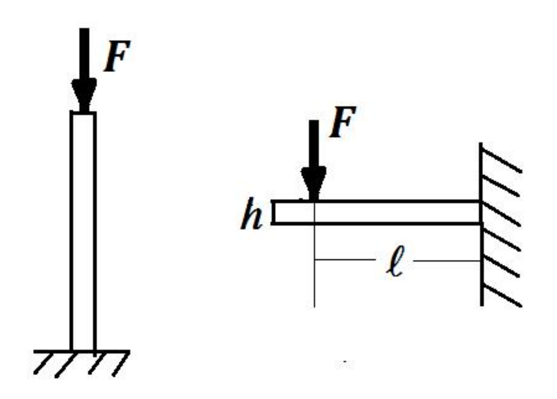

F
F
h
ℓ

图 2 柱和梁

在图 2 上，左边是一个柱承受的压力，而右边是一根悬臂梁。外力 F 是一样大。设这根柱和梁的横截面都是矩形，其宽度是 ***b*** 高为 ***h***，并设它们都是有同一材料组成的。由材料力学我们知道，两种情形，截面上的最大应力[σ]可以经过简单的计算得到。

对于柱的情况[σ] *=F/(bh)*，因为这时柱的横截面上受力是均匀的，所以应力是外力 F 简单地用截面积去除。应力沿整个截面和杆长都是均匀的。

对于梁的情况[σ]=6*ℓ*/(*h*）*F/(bh)*，这种情形，截面上的应力有拉力也有压力，所以最大应力比起柱的情况要增大 6*ℓ*/(*h*）倍。就是说如果 ***ℓ*** 比 ***h*** 大 10 倍的情形，则这时受同样大小的外力，梁的最大应力应当是柱的 ***60*** 倍！而且最大应力的位置是在梁的根部。

这就是说，在相同的截面的梁与柱，一般情况下，柱的承载能力要大得多。所以俗话说“立柱支千斤”。

这也就是说，在给定横截面的梁上，要降低梁的最大应力，最重要的因素就是要降低承力点到梁根部的距离 ***ℓ***。因为 ***ℓ*** 与最大应力是线性相联系的，最大应力大了便会引起梁的破坏。

现在回过头来看脊柱，由于人体是经常活动的，所以脊柱有时是作为柱来承受外力的，比方说在人直立、或端坐的状态就是这种情况；有时脊柱又作为梁来承受外力的，例如，人在弯腰拾取重物时，这时上体

的自重和重物的重力都是垂直于脊柱的轴线的。从前面的简单讨论，我们知道，除了人在平躺的情况外，脊柱还是作为立柱时在脊柱内引起的最大应力较小。脊柱最大负担，亦即引起局部最大应力，还是当人处于弯腰负重的情况。这时，脊柱大致上就表现为一根悬臂梁，为了保护脊柱，这时需要多加小心。

因此，人类在很长的历史演进中，已经学会了在负重时尽量使脊柱作为支柱来承载。如图许多人采用头顶负重，或者用肩挑负重，都是使重物的重力大致是沿着脊柱作用，使脊柱作为支柱，只简单地承受压力。这种负重的办法是很科学的，它既能够承受更多的重量，又能够保护脊柱不受伤害。



图 3 头顶重物



图 4 肩挑担子

然而，我们前面从力学的角度来看脊柱，未免过于简单。人的脊柱毕竟不是一根僵直的棍棒，而是如图 1 所示由一节一节的脊椎骨组成的，在每两节脊椎骨之间，又垫着一层椎间盘。它们是由中央部富于弹性的胶状物质的髓核，和周围是多层纤维环按同心圆排列易于变形的软骨构

成的。只有这样，脊柱才能够自由弯曲，而不是僵直的。

也正是脊柱构造的这一特点，它和严格的力学中的“梁”是很不同的。最大的不同，就是它能够很好地承受压应力，而不能承受拉应力。我们知道，严格力学上的梁在承受弯曲的时候，截面上有一部分承受压力而另一部分承受拉力。但是脊柱在承受弯曲时，例如弯腰负重时，有压力也会有拉力，压力就由脊柱本身承受，而拉力部分，只能由脊柱旁边的腰肌来承受了。

当你弯腰负重时，所要搬动的物体比较重，超过了你的能力。实际上是你的背肌不够强，被拉长了，这时脊柱所受的压力是脊柱的前边应力大后部应力小，椎间盘被挤到后边去，而后边的纤维组织会被压裂而使髓核从脊椎的后方突出。我们知道在弯腰负重时，人脊柱类似于悬臂梁承重，而悬臂梁的应力是它的根部最大，所以这种突出大多发生在脊椎的最后一节上，即第五腰椎上。我们又知道脊柱后面的椎管里有神经，而第五腰椎出发的左右两条坐骨神经分别延伸到左右两条腿上。突出的椎间盘会和某一条坐骨神经相摩擦和挤压，使这条神经慢性发炎，这就构成坐骨神经痛。这是一种很常见的劳动损伤。俗称腰腿疼。严重时受伤者只能卧床休息而失去劳动力。前面说的沙叶新的夫人大概就是这种情况。图 5 是弯腰负重时椎间盘受力示意图，用一根受拉的弹簧表示背部的肌肉，脊椎骨只能承受压应力，弯曲时梁的截面上的拉力是由弹簧

承受，在弹簧强有力的时候，椎间盘基本没有变形，当弹簧较弱时 椎间盘就会被压变形以至椎间盘突出。图 6 示意椎间盘突出的病变。

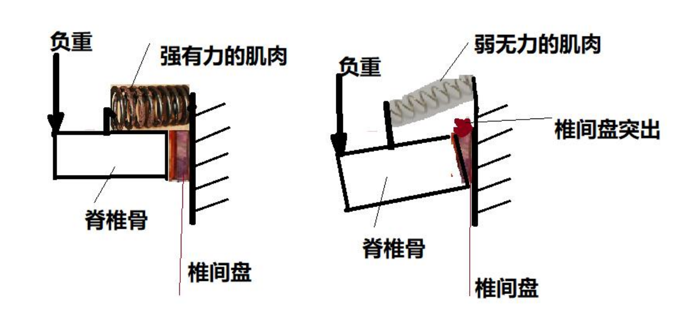


图 5 弯腰负重时椎间盘受力示意图

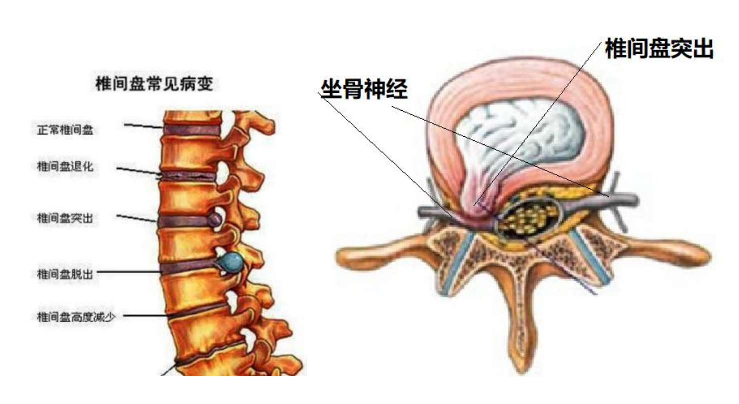


图 6　椎间盘突出压迫坐骨神经示意

为了避免这种损伤，首先是对于所要搬动的重物要衡量一下，是不是一个人搬得动。不做超过自己能力的事。其次在搬动时要姿势正确，要使重力对脊柱所形成的力矩尽量小。也就是说让重力作用线与脊柱的

轴线距离尽量小，这相当于减小图 2 中的 ℓ。下面四幅图中左边两幅的姿势是正确的，而右边的两幅是不正确的，因为后者的 ℓ 相对要大许多。注意左下边的那幅，那个人让重物靠在腹部，重物对脊柱的力矩就会减小到最小的程度。在文革中许多知识分子被下放到农村做体力劳动，由于不熟悉这些劳动中的窍门，所以很多人用力不当，再加知识分子平常都是坐着工作，背部肌肉缺少锻炼，很弱。所以很容易得这种腰腿疼的病。

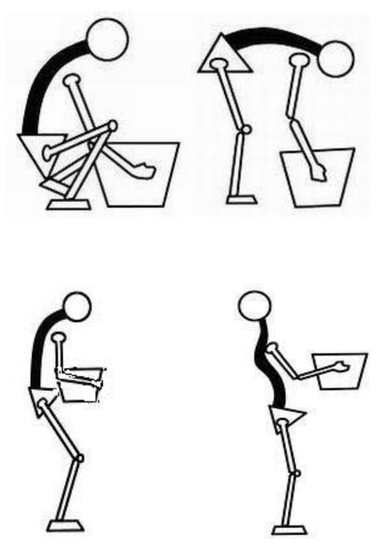


图 7　搬动重物的姿势

要避免椎间盘突出，除了搬东西正确用力之外，还要注意增强自己的背部肌肉。这就要平时注意锻炼。 图 8 是一组用以增强背肌的锻炼动作，

如果经常做这些动作并且持之以恒，背肌一定能够强起来，有强健的背肌，在弯腰负重时也就比较不容易椎间盘突出。

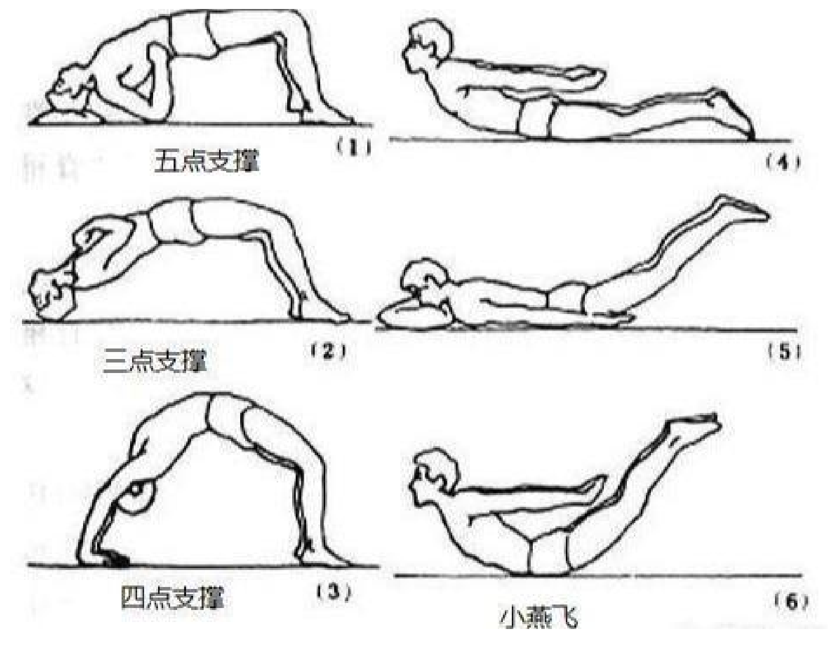


图 8 增强背肌的练习

脊柱和严格力学上的梁还有一个区别是，脊柱作为梁的组成材料是生物组织。它的行为与时间关系很大，在脊柱弯腰负重时，背肌承受拉力，时间稍长，肌肉就会疲劳不能继续支持。即使脊椎和椎间盘本身，承力的时间一长，也会产生显著变形和损伤。

经常会发生这种情况，一个人好好地，可是在长时间蹲着或较长时

间弯腰之后（如图 9），腰腿猛然难以忍受地疼起来，以至不能行走。有时，由于长时间躺在过软的床上，使腰前弯的时间过长，也会产生这种情况。为避免这种情况，一定不要长时间弯腰。过一小段时间，需要直立活动一下。也不要睡过软的床。





图 9 蹲着、弯腰和蹲着劳动

现在我们要问，如果不幸患了椎间盘突出症，应当如何治疗呢。上面我们从力学原理上讲了这个病是怎么得的，腰治疗它，还需要从力学上来讲一讲。

腰腿痛既然是由于椎间盘突出的髓核摩擦和压迫坐骨神经引起的，首要的办法，就是减少压力和摩擦。这在临床上有两种办法，一是腰里穿一个“铁背心”（图 10），二是做腰部的牵引（图 11）。前者固定腰的形状减少腰部活动带给髓核对坐骨神经的摩擦，同时由于架子的支撑，也减少了上体对椎间盘的压力。后者使病人的胯部向下拉、胸部向上拉，使受伤的椎间盘缓解压力便于恢复。



图 10 支架

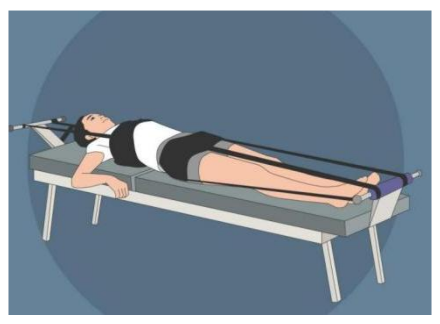


图 11　牵引

其次，在日常起居中，坐、卧都要严格注意，与能够引起椎间盘突出的因素，反其道而行之。

第一是，变弯腰而为爬行。如果人在弯腰时腰部是一根悬臂梁的话，爬行时腰部是一根典型的两端简支梁。我们知道，悬臂梁的弯矩是向下

的，即脊部上侧受拉下部受压，简支梁的弯矩方向相反，即上部受压下部受拉（图 12）。由于这个原因，所以有的地方干脆用爬行来治疗轻微的椎间盘突出的患者（图 13），要求患者每天做几次爬行，每次要坚持一段时间。其实，人类的脊椎的构造是适应爬行的，当人类由爬行进化为直立行走时，脊椎的构造并没有相应地改变过来。这才有在弯腰负重时产生腰腿痛的病。四肢爬行的动物是没有这种疾病的。

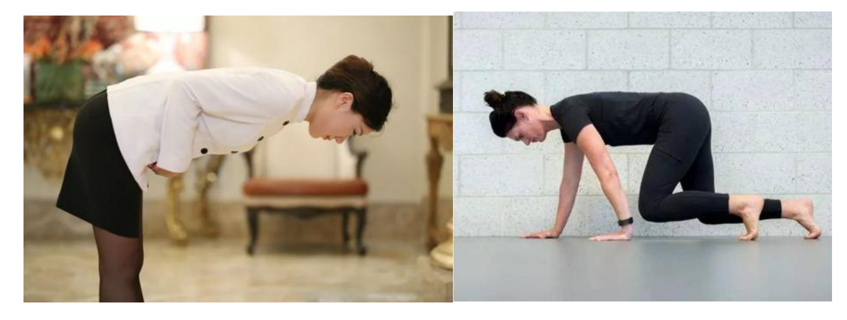


图 12 弯腰与爬行时脊椎受力不同



图 13 用爬行来治疗和减轻椎间盘突出的症状

第二是，坐卧都要坚持尽量使脊椎反向弯曲。如下面这些（图 14-15）。才能使椎间盘突出逐渐回复原状。

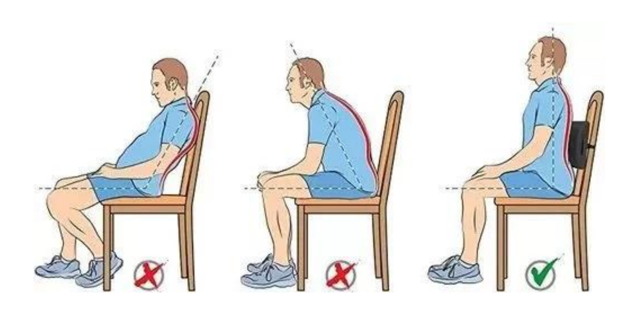


图 14 正确的坐姿

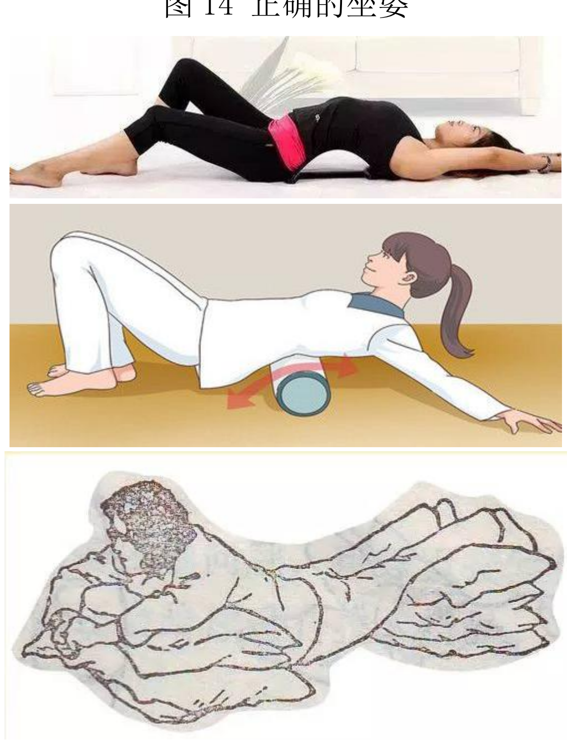


图 15 矫正椎间盘突出的卧姿

以上这些做到了，经过个把月到两三个月，腰腿痛就可以逐渐减轻到痊愈。现在有的大夫动不动就劝人做手术，其实大部分椎间盘突出病人是不需要做手术的。笔者就曾经由于劳动、车船颠簸、参加拔河用力不当等，多次患椎间盘突出，每一次都是用以上的办法治好。有一段疼得实在厉害，曾经咨询过一位当医生的中学同学，他不建议手术，他的意见是只要生活基本能够自理，即不要做手术。因为手术也不见得能够根治，而且手术后也依旧不能做重体力劳动。所以我就一直是靠以上说的办法慢慢治疗。

在日常生活中，即使我们并没有负重，但是由于姿势不正确。虽然脊柱所担负的力矩很小，但是由于我们的脊柱和肌肉组织是不能承受很长时间的，所以即使负重很小但时间过长也会造成脊柱的病变。例如由于躺着的姿势不正确或长时间在电脑前工作，或者长时间蹲着，会造成颈椎和腰椎病变。还例如，长期小学生曾经用单侧背的书包，后来研究发现会导致脊柱歪曲，才普遍改用如现今用的双肩背书包。下面这两幅图（图 16），他们的姿势就不正确，会造成颈椎或腰椎病变。因为时间长了，他们的肌肉会松弛，脊柱长时间维持一个姿势就会产生“流变”，是一种不可恢复的变形。有时肌肉长时间紧张还会产生肌肉劳损。在需要较长时间弯腰时，最好把一支胳膊支撑在膝盖上；在需要较长时间做

蹲位劳动时，例如人们在擦地板时的情形，这时最好采取爬行在地板上的姿势，它会使脊柱的负担减小许多。

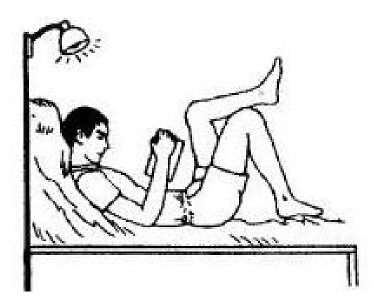




图 16　长期这样的姿势有可能导致脊柱病变

可见，懂一点力学，对于保护你的脊柱的健康是很有好处的。

2023，3，30 修订

26 智能结构

智能结构(英文 smart structures 或 Intelligentstructures）是近三十年兴起并快速发展的研究方向。

人类与结构打交道，有几千年的历史。设计、建造、使用。从来都是，建造成什么样子，担负设计赋予它的功能，一直到失效，结构基本上是不变化的。可是随着时代的进步，终于来到这样一天，人们想要使建成的结构适应环境而变化具有像生物体上的结构那样的功能。这样的结构就称为智能结构。

举例说，飞机的机翼，我们知道在不同飞行速度时机翼的升力与阻力是不同的。怎样能够使机翼的外形和姿态，随飞行的速度而改变，以得到最大的升力和最小的阻力。这实在是一种魅人的机翼结构。





图 1 可以随气流情况改变形状的机翼

再比如，如果我们通过传感器探知结构，例如混凝土结构的某处产生了一道微小的裂纹，结构就会自动“分泌”出高强度的粘合剂把裂纹

粘合好，对结构进行自适应的修复。

还比如，希望结构能够自行抗拒外来的振动干扰。希望高楼结构在地震中不倒，希望桥梁在大风中不强烈振荡和摇晃，希望飞机的机身壳不会传递发动机激起的噪音使乘客不舒适。使结构起到抗震和隔振的作用等等。

以上这些，就是智能结构要求做到的。一句话，就是结构对外部环境和自身的状态能够做到自适应、自修复、自调整。

上面这些想法都是美好的。但是它的实现却取决于整个人类科学技术的进步，取决于各行各业的交互合作。实际上是非常复杂的事情。它至少与以下几个技术门类直接相关，取决于他们有机的结合。这就是：传感器、智能材料、控制理论、结构力学、计算机科学。

要让结构适应对环境进行合理的适应，首先就需要结构对自身和环境的情况进行探知，这就取决于各种各样的传感器，即把环境和自身的位移、速度、应力、应变、温度、振动频率、磁场强度等力学和物理量进行准确的量测，并且能够把这些量变为电讯号传输到计算机。就拿测量位移、速度、加速度并通过积分确定空间位置的振动陀罗来说，现在已经能够做到缩小为毫米大小。以致能够装在手机里显示所在的位置。其他测量温度频率应力应变的传感器，也都能够做成米粒的大小。这些传感器的成就就能够用它们承载结构上，精确地测量结构环境和自身所

需要知道的量的大小。这就好像结构有了感觉。称为结构的自感觉。自感觉是智能结构必要的组成部分。只有有了自感觉，结构才有可能去自适应。

如果结构使用的材料永远是砖瓦、石头、木材、水泥、钢材、玻璃等传统材料。那么结构还是“智能”不起来。重要的是在结构用材中，需要添加一些重要的新发现的或人造的材料。有了它们，才能赋予结构以智能，这些材料被称为“智能材料”。这种材料的特点是，在温度、电流、磁场等物理量变化时，它的状态具有明显的变化。比较重要的智能材料有下面这些：

压电材料。受到压力时会在两端面间出现电压的晶体材料。1880 年，法国物理学家 P. 居里和 J.居里兄弟发现，把重物放在石英晶体上，晶体某些表面会产生电荷，电荷量与压力成比例。这一现象被称为压电效应。随即，居里兄弟又发现了逆压电效应，即在外电场作用下压电体会产生形变。压电效应的机理是：具有压电性的晶体对称性较低，当受到外力作用发生形变时，晶胞中正负离子的相对位移使正负电荷中心不再重合，导致晶体发生宏观极化，而晶体表面电荷面密度等于极化强度在表面法向上的投影，所以压电材料受压力作用形变时两端面会出现异号电荷。反之，压电材料在电场中发生极化时，会因电荷中心的位移导致材料变形。后来人们制造出许许多多种类的压电材料，有无机陶瓷的也

有有机的。压电材料被广泛地用于传感器、换能器（机械能与电能之间比较方便的转换）、驱动器等方面。

电磁流变体材料。一般情况下表现为液体，一旦有外加电场或磁场，就会变为坚硬的固体。这是一种近几十年人们热衷研究的人造的材料。其原理是在胶状体内有许多能够在电场或磁场下起反应的微粒，在外加电磁场的作用下，其两极或上或下始终指向电磁极，从而使微粒吸合在一起，首尾相连，排列成行，构成长链。电磁流变液体内的微粒链迅速形成，并在容器内从一端延伸至另一端，这就是流体迅速固化的关键因素。这种材料已经广泛用于离合器、人工关节、减震器、电磁阀门，汽车防撞装置等方面。

形状记忆合金。大约五六十年之前，人们发现有一类合金材料，它在一个特定温度范围内，内部结构有一定的特殊性。在冷却到某一温度以下时，它的晶体结构不稳定。这时它具有很大的可塑性，在外力下，它易变形。除去外力它还能够保持这时的形状，但是一旦温度上升到特定点时，不稳定结构又会变成稳定的结构，它就恢复原来的形状。于是，科学家把这种能恢复自己形状的效应叫作“形状记忆效应”，把有这类特性的合金材料叫作“记忆合金”。这种恢复原来形状的性能有很多的实际应用，引起广泛的永久兴趣。迄今发现有记忆性能的合金有五十多种。例如航天飞行所用的通讯天线应当是抛物面形状，发射前将它压成

一小团，等到升空后，通电加热就会展开它的抛物面形状。

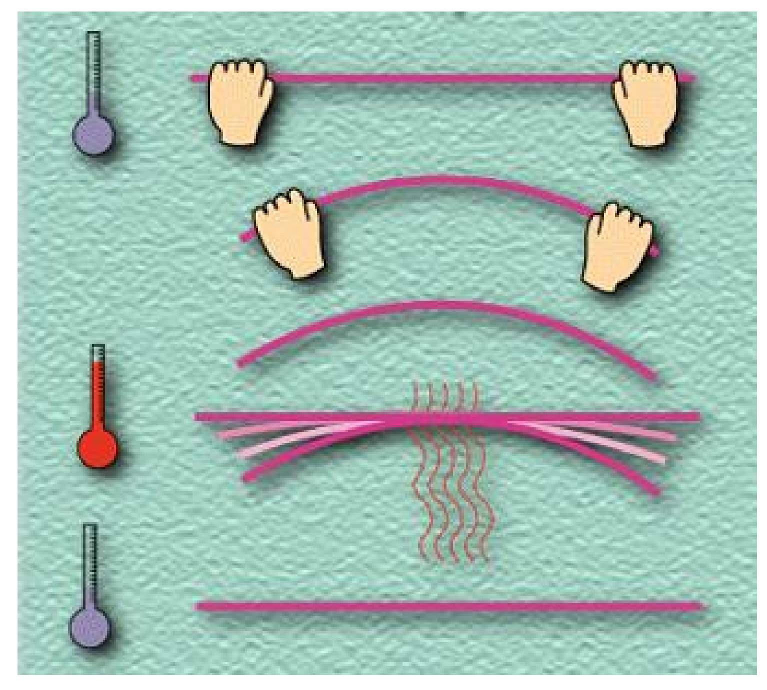


图 2 形状记忆合金

除了上面介绍的几种外，智能材料还有光敏材料、磁致伸缩材料、电致变色材料等等。总之对于任何物理量的微小改变会引起另一物理量的明显变化的材料，都可以称为智能材料。研究这些新材料的领域已经形成一门新兴学科材料科学的重要组成部分。

上面我们介绍了传感器和智能材料。这两样事情给了我们进行组成智能结构的物质条件。接下来事情可能更困难更魅人。

它的困难之处在于，传统的结构设计只要求设计的结构能够适应大

致不变的条件。而现在的困难在于，我们要求结构能够根据传感器测量的数据去改变自己，以达到更合理的要求。传统的结构设计主要是结构力学的问题，而现在要求我们不仅要熟悉结构力学，还要熟悉控制理论，而且整个控制过程是动态的。就是要求把传感器测量的数据传递给计算机，计算机把这些数据根据控制理论的结论进行加工，得到结构如何响应的数据，用这些数据去指挥结构进行适应调整。重要的是怎样适当配置智能材料和由它们组成的器件以适应控制的要求。这就需要设计者有更广的知识，还要有多学科的合作。

智能结构的研究已经结出丰硕的成果。例如在抗震防震、裂纹自修复、飞行器的减阻等方面都已经得到可喜的进展。但是可以说智能结构的研究还是刚刚开始，今后的路子还很长，至于它那能够达到怎样的高度，这是很难预料的。

2021，3，10

27 漫话刀剑

这是笔者近来的一篇文章，虽然一般不把刀剑看作与结构相关的论题，但是它涉及的问题仍然是强度、自己不破坏这些和结构类似的论题，或者推而广之，也可以把刀剑看作一类特别的结构。所以把它附在最后。

§1 各种刀具

刀，是人们最常用的用具之一。日常切肉、切菜、砍树、剪枝、剃胡须、削水果皮,等等，无处不用刀。即使是这样，刀的重要性还是比古时降低了。

在冷兵器时代，刀不仅用于防身，还可用于格斗厮杀。刀的好坏体现一个国家的强弱。一侧有刃的是刀，两侧带刃的称为剑，刀剑就成为最重要的武器。那些好的刀剑就非常名贵。

古小说中《三国演义》中有关云长使青龙偃月大刀，《水浒传》中有杨志卖宝刀的情节。

我国制刀剑的历史很久远，春秋时代，有文献记载说楚王命人制剑三把：名为龙泉、太阿、工市。又说楚王令胡风子制剑干将、莫邪两把。越王命欧冶子制剑五把，名之为纯钧、湛卢、豪曹、鱼肠、巨阙。这里制剑能手胡风子和欧冶子是师兄弟。这些剑都非常有名，人们视为宝贝。

所以后人称好的剑为宝剑。

考古发现，汉以前的刀剑大多是用铜掺加少量其他金属材料制成的。由青铜制成的剑身很薄，质地脆，很容易折断，只适于刺杀而不适劈砍，因此当时人们把剑称为“直兵”。和秦始皇同时期青铜剑，西方考古还没有发现长度超过30厘米的，而西安兵马俑里发现的那些古青铜剑（图1 下），平均近1米长，至今没有锈蚀、寒光逼人。

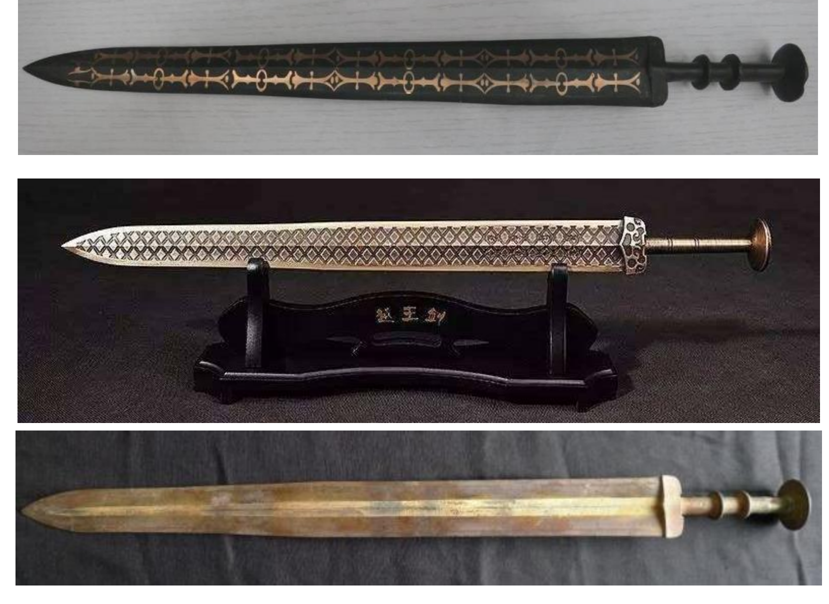


图1 古代青铜剑

1965年。在湖北江陵望山的战国墓中发现一柄青铜剑（图1中），这把长55.6厘米、宽5厘米的剑呈现优美的流线形，擦去浮尘后，剑身通体装饰的黑色菱形花纹像星光一样闪烁，剑格以绿松石和极珍稀的蓝

琉璃镶嵌出云纹和兽面纹，剑柄处刻着 8 个鸟篆体铭文“越王勾践自作用剑”。

科学家发现剑的中脊和两刃是用两种不同成分的青铜铸接而成，剑刃坚硬而锋利，剑心却有很强的韧性。这恰好印证了传说中的“复合剑”确有其物。



图 2 唐剑（上）、宋朴刀（中）、清牛尾刀（下）

中国自汉朝以后，铁有了规模生产，工匠们小量经过不断锤锻能够把铁炼成钢。于是就出现了能够“削铁如泥”的钢刀。至唐代的唐剑达到制剑技艺的最高峰。后来这种技艺传至日本，形成后来闻名于世的日本武士刀。国内在作为兵器的刀剑，在形状与功能上 虽然有上百种变化，但制作技艺上始终没有再提高，而且由于历代统治者惧怕民间拥有武器，对制刀剑加以多种限制，唐代的制剑技艺后来也失传了。

放眼世界，在刀剑制造技艺上，有三大著名的流派。这就是大马士革刀、马来克力士剑、日本武士刀合称为世界三大名刃。

大马士革刀古时作为印度、波斯、阿拉伯等国的兵器。最大的特点是刀身布满各种花纹。这种花纹是在铸造中形成的，与折叠锻打形成的焊接型花纹钢（包括中国剑、马来刀等等）或者淬火型花纹钢（日本刀）不同。古代几乎所有的花纹钢都是用来制作武器的，因为花纹能够使刀刃在微观上形成锯齿（肉眼无法分辨），使得刀剑更加锋利。大马士革刀以伊朗为代表。伊朗古代铁兵器极为著名，当时的蒙古、印度、土耳其以及东方各国王室均聘用波斯良匠铸造兵器，随着年代的推移，人们逐渐忘却波斯人，而径直以大马士革称呼。

克力士剑则需要匠人在铁矿稀少的印尼群岛费心搜集镍元素含量较高的铁及各种材料，经过数百次的折叠锻打和淬火回火等工序，才能完成基础的锻造。

克力士剑刃身上的水波状花纹，来自于不同材料经过酸洗后的变化。一把顶级的克力士剑，材料更为稀有，有时需要采用来自外太空的陨铁进行锻造，是真正意义上的来自星星的剑。但这个级别的克力士剑通常只有皇家才能拥有。材料的稀有和工艺的复杂高级，让掌握克力士剑锻造工艺的匠人们在人民心中的地位无比崇高。







图 3 世界三大名刃

大马士革刀（上）、马来克力士剑（中）和日本武士刀（下）

日本的武士刀，具有暗光花纹，有边花、腹花、小暗斑、粗暗斑等花色。由冶铁、制刃、淬火等过程制成。经过反复锤锻的钢才可以制刃，

日本人还要将钢料与熟铁组合为刀体。以使坚硬的钢与柔软的熟铁刚柔相济，称为复合刃。日本刀早在宋代就闻名于中国，欧阳修有诗句：“昆夷道远不复通，世传切玉谁能穷。宝刀近出日本国，越贾得之沧海东。”

简单介绍完作为兵器的刀后，让我们看一看作为日常应用最多的一种刀——厨刀。



图 4 西方的部分厨刀

如果你走进外国人的厨房，你会发现有各种刀具。有用于切肉的，有用于切鸡鸭的，还有剁骨头的、削皮的、擦丝的等等，专刀专用不一而足。而中国人的厨房里大多就一把菜刀，一刀多用，样子也挺笨，像

一块方板。不过可别小看它，用一把菜刀可以切、剁、斩，拍、片，切菜、切肉、切鱼、切鸡鸭、剁排骨。而且仅切的刀法就有直切、推切、拉切、锯切、铡切、滚切等六种方法。可以切片、切丝、切丁。还可以用于把散布在案板上的菜，铲、搓在一起直接入锅。

中国厨刀之外，国际上德国和日本的厨刀也很有名。主要的优点在于他们的厨刀比较锋利、耐用。这和他们在制刀的技艺和用材上有深入的研究有关。而且他们除了生产西方各式各样不同用处的厨刀外，近年来也生产中式厨刀。有时用大马士革刀的技术和更新的技术生产比较名贵的厨刀。

随着近代工业的兴起，金属制品加工需求的增长，促使一种新型的刀具问世与迅速发展。这就是各种机床所使用的刃具。车床、铣床、刨床用的车刀、铣刀和刨刀，各种钻头和拱螺丝和螺母的丝锥板牙（图 6）。它们对金属加工的切削原理也和普通的刀剑切削一样。只不过它们的硬度要特别大，刃具的结构与尺寸需要更为精细的研究与设计。



图 5 中国厨刀





图 6 各种钻头与刀具

§2 什么样的刀是好刀?

在人们直觉中，好刀一定要非常锋利。的确是这样。

进一步问，什么是锋利呢？就是刀刃上最薄的地方厚度要小。小到什么程度呢？当然是愈小愈好。就吉列剃须刀的刀片来说，它的最薄的地方只有 0.4 微米。亦即4×10^{-5}cm。

刀刃这么锋利,有什么好处？我们拿它对准物体设想接触长度是 1cm，那末接触面积应当是$4\times10^{-5}cm^2$，现在如果在刀片上施加 40g 的力，这是很小的力了，还不到一两重的力（一两是 50g）。那末，在接触面上所受的压力强度就是 1000kg/cm^2，就是说，每平方厘米一吨！这么大的压力强度，即使是铸铁（铸铁在受压时的破坏强度大约是 800kg/cm^2)也要压坏了何况剃胡须呢，所以用刀片剃起来十分轻松一点也不费力。从这里我们就认识到锋利的刀刃，在同样使力的条件下能够使刀与物体的接触面压力强度加大。锐利的刀锋能够使切削用力减小，省力。

单单刀刃锋利了，是不是就能成为好刀呢？就以上面举的例子来看，刀刃作用在物体上的压强达到每平方厘米一吨，作用力与反作用力是相等的，那末物体作用在刀刃上的压强也是每平方厘米一吨！如果刀刃用的材料不好也可能在这样大的压强下不是物体破坏被割断，反而会使刀刃受损，可见刀刃锐利只是好刀的必要条件而不是充分条件。好刀还需要在材料上下功夫。

如果刀的材料很软，那就什么也切割不动，废物一把。春秋战国时期人们知道最软的金属是铅，于是用铅做的刀，即“铅刀”来形容没有用的东西。有时人们自谦时也把自己比喻为铅刀。

实际上，几千年来人类为了改善刀剑所花的功夫主要是在寻找好的材料上。许多好的工艺也都是为了使材料的硬度得到充分发挥或改善材料的性能而研究出来的。

常见的刀刃受损的情况不外两种，即崩和锩（图 7），崩是由于刀刃的材料脆弱，遇到物体比较硬容易脆断，刀刃崩掉一块多块或折断；锩是由于刀刃的材料比较软，碰到硬的物体刃就变形卷起来或者使整个剑弯曲。如何使刀切割时既不崩也不锩，这就是值得认真探求的问题，而且研究它具有悠久的历史。

青铜器时代，刀剑都是用铜和锡的合金制造的，所以锡所占的正确比例就成为当时好刀的关键。在春秋时代的文献《吕氏春秋》中有一段记载铜和锡的辩论：‘相剑者曰：“白所以为坚也，黄所以为韧也，黄白杂则坚且韧，良剑也。”难者曰：“白所以为不韧也，黄所以为不坚也，黄白杂则不坚且不韧也。又柔则锩，坚则折，剑折且锩，焉得为利剑？”’这里白指锡，黄指铜。这段话说明当时人们对这两种成分做剑，既要不崩又要不锩提出的问题。也就是说把两种金属合在一起，是把它

们的优点合在一起了呢，还是把它们的缺点合在一起了呢？这是人们犯疑惑的地方。

大约同一时期，记述当时官办手工业规范《考工记》中有记述：“三分其金而锡居一，谓之大刃之齐。”这里齐是当时合金的意思。说明当锡占三分之一时，是当时最好的制剑配比。考古研究，好的越剑大致是符合这个比例的。



图 7 刀刃的崩与锩

汉以后进入铁器时代，铁比铜的硬度大许多，是制刀的好材料。不过最初人们炼出的铁，是生铁，比较脆，那样的刀容易崩刃和折断。后来人们发现，经过不断锤炼的铁，不仅硬度大而且不脆，用它做刀剑，锋利无比不崩也不锩。这就是后来产生的唐刀。

后来经过研究，原来初冶炼出来的铁，含碳量高，约大于 2%。经过反复锤炼以后，含碳量降低到 0.03%-2%,这就是钢，如果含碳量在 0.03%以下就是平常说的熟铁了。熟铁比较软，做刀易于锩，所以不用。

汉代以后虽然一些能工巧匠能够锤炼出钢，但由于仅出于少数人的手工，数量很少，实际上钢在当时还是稀缺之物，还不能整把刀剑都用钢来做，所以要“好钢用在刀刃上”。图 8 就示意白色的好钢如何用在刀刃上的实际做法。即使是这样，一把钢刀也是十分名贵的。

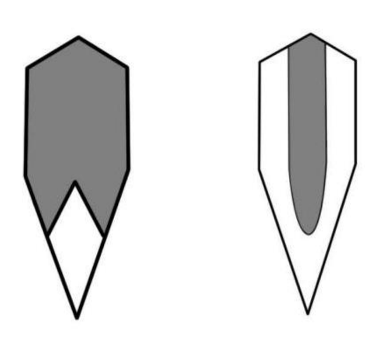


图 8 钢通过镶嵌或包裹的方式用于刀剑

到19世纪中叶，炼钢能够工业化批量生产，于是钢刀就能够普及了，以至于普通的厨刀、水果刀、裁纸刀、剪刀、斧子等用具，大都能够用钢制造，成为大众化的产品。

钢普及后，刀具的改进就要寻求进一步高硬度、高耐磨、有韧性、耐腐蚀的新材料。人们发现在铁中添加适量的铬、钨、锰、钼、钒、铌、钴、钛等金属，钢的性能会有不同程度的改善。这就产生了新的硬质合金系列和由它们制成的刀具、机床用的刃具或钻头。添加金属的种类、比例不同性能会有很大的差别，这些新型合金的配方和冶炼方法大多有专利或保密。

与金属刀具发展的同时，人们注意到陶瓷在硬度、耐磨性等方面的优点，开发出使用陶瓷制作的刀具。这种刀具锋利、耐磨很好，其缺点是由于陶瓷比较脆，不适于砍剁等动态撞击条件下使用，同时要防止它从高处跌落，以防摔碎。

近年来，人们又发明了刀具表面涂层的办法，特别在高速切削时来增加刀具表面的硬度、耐磨性、减轻刀具与加工物的粘合与化学反应。通常的涂层有氮化钛涂层(TiN)、氮碳化钛涂层(TiCN)、氮铝钛或氮钛铝涂层(TiAlN/AlTiN)、氮铬铝涂层(AlCrN)、金刚石涂层(Diamond)等 。

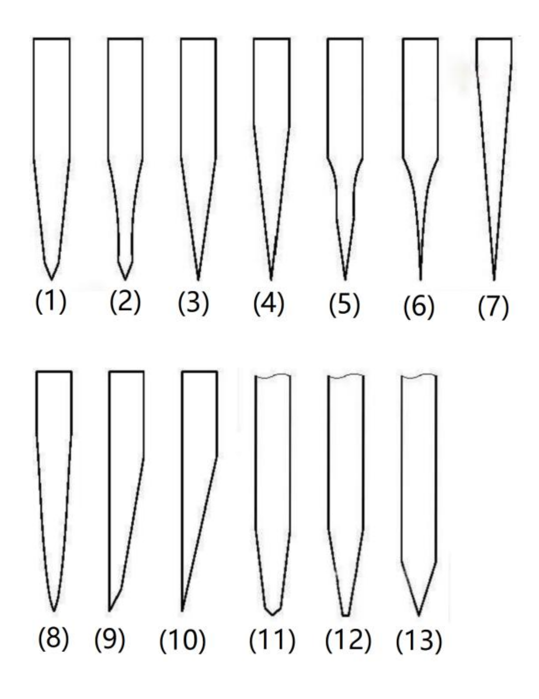


图 9 刀刃的各种常见的剖面

介绍了刀具的材料，我们来谈一谈刀刃问题。我们前面说刀刃务求锋利。这也不是绝对的，如果刀刃过薄像吉列刀片似的，那末当被切的物体有比较强的韧性时，刃就容易弯曲或断裂，所以刀刃的剖面实际上是很有讲究的。不同的切割对象应当采用不同的刀刃剖面。图 9 列出了常用的 13 种刀刃剖面。

如老式剃刀，剖面大致是（6），单面斧子、木凿子或锛子是（9）或（10）。如果要在铁器上凿字的冲子就应当是（11）或（12）刀刃钝

一点反而好。菜刀、刨刀、柴刀、镰刀、水果刀、西瓜刀、刺刀、剪刀都可以选用不同的有利的剖面。

应当说明的是，所有的锋利的刀刃都是磨出来的，“宝剑锋从磨砺出”。无论是铸造、锻造还是机械切削都不能得到锋利的刀刃，它们只能制造刀胚，再通过磨刀去“开刃”使刀口锋利，或者使用磨床加工得到锋利的刀口。磨好的刀用久了，刀刃会因为磨损而不锋利，就需要再度磨砺使它锋利。

磨刀也是一种技术活，不仅磨刀时持刀的力度，刀刃与磨石保持什么角度有讲究，就是磨石粗细的选用也有门道。另外磨刀时一般应当在磨石上涂水或油，而不能干磨，因为干磨摩擦所生的热会使普通钢刀的刀刃的表面退火产生软化，刀刃不耐用。

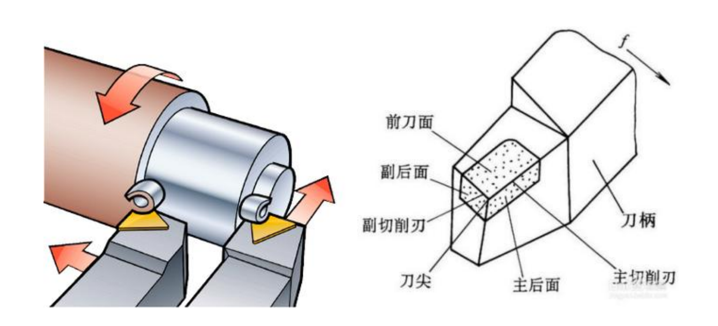


图 10 车削与车刀示意

机床用的刀具，种类繁多且比较复杂。图 10 是典型的两把刀车削（一把车端面，一把把轴车细）和一把车刀。刀上那块带麻点的小块（图左刀上黄色的三角形块），是硬度特大的高速钢。可以看出机床的切削，实际上是“削”而不是“切”。犹如普通用刀削水果皮，在刀刃压入果皮后刀刃沿着皮的一定厚度前进而不是直接切入水果的深处。在车削时车刀是相对静止的，而工件在相对车刀高速转动，车刀在工件上做相对运动。不同的是由于车刀切削时受力比较大，车刀比较厚以致使它的刃变成一个棱，棱的角要保证是真正的角不能是一段“圆弧”。所以所谓磨刀就是用砂轮把它打磨出棱来，各个平面之间的角度要保持一定。

到二十世纪后半叶，人们发明了激光，是由频率单一、能够精确地大远程束细和使能量高度集中的光束。这种集中在几微米之内的光束照射到物体上会顷刻产生极高的温度，能够将它熔化割断。啊，这就是一把极妙的激光刀。现在，激光刀已经应用得很多。用它切割金属，既精确又节约材料，用它进行外科手术代替传统的手术刀，既精确又容易止血。这是一类崭新的刀具，已经在许多领域取代了传统的刀具。近年来，人们有研究将它用于战争的，用它照射靶机能将其击落，用他照射敌人使他丧失战斗力，在战场上一定程度上它能够取代传统的刀剑。激光刀确实是一把好刀。它的应用前景未可限量。



图 11　激光切割

§3 材料的硬度

前面说过，一把好的刀子选用好的材质是很重要的。

但是如何选用好的材料，如何合成合用的好的材料，给了一块材料如何评定它适合不适合做刀，这是一个很复杂的问题。

最直接的办法就是去试，用给定的材料打造一把刀，在用它去切割不同的东西，试用满意了，就说这是合用制刀的好材料。不合用，以后就不会有人拿它制刀了。

材料是发展的，青铜器时代，铁器时代，钢铁时代，所以人们就要不断地去试，不断取得经验。几千年，历史上的好刀名刀都是这样不断试验中产生的。

把这种朴素的试验刀子材料硬软的方法用来鉴别矿物的硬度。在1812年，德国的矿物学家Friedrich mohs（1773-1839）提出用10种矿物来衡量世界上最硬的和最软的物体，这是所谓的摩氏硬度计。他选择被测样品的尖锐部位。在已知硬度的平面型矿物硬度计平面进行刻划，刻划硬度的测试由低至高依次进行。观察硬度计平面有无刻痕，还要轻擦平面，以防被测样品的粉末留在硬度计上，使判断失误。若硬度计平面有划痕，则样品硬度大于硬度计。再依次测试更高一级的硬度计，直至介于两个硬度级别之间或相当于某一硬度计为止。按照他们的软硬程度分为十级：

1、滑石　2、石膏　3、方解石　4、萤石　5、磷灰石　6、正长石　7、石英　8、黄玉　9、刚玉 10、金刚石，

各级之间硬度的差异不是均等的，等级之间只表示硬度的相对大小。

摩氏硬度常用测试硬度的物质：铅：1.5，指甲：2-3， 铝：2-2.5，铜：2.5-3，大理石：3，小刀：5-5.5， 玻璃：5.5，钢锯条：6，钢锉 6.5，翡翠6.5-7， 雨花石、玛瑙、石英石：7。

常见金属的硬度： 铬：9， 铁：4-5 ，银：2.5-4，铜：2.5-3，金：2.5-3，铝：2-2.9，铅：1.5

摩氏虽然提出了材料硬度的概念，并且把硬度划分等级。但是还有不科学的地方。首先两种材料相互划，对于它们之间的压力没有考虑，因为压力不同对划痕的深度是会有影响的；其次，他只是用一种物体的尖锐部分去划，而没有对尖锐部分的形状做出严格的规定，尖锐部分的形状也会影响划痕的。

用刀子切一个物体，这是一类再普通不过的问题了。从力学上讲，就是不同材料的两个物体在一定压力之下接触，其中一个是刀刃形状，比较锐利，另一个可以看作接触面是平面。要问，这两个物体哪个先破坏。也就是说，是接触平面的那个被切开，还是刀刃锩了？被切开或锩了，我们管它叫破坏，要问那个破坏了，还是两败俱伤？或者换一种说法，不管两种材料的外形如何，在压力下只有很小的面积接触，问哪个破坏？

通过大量的试验，人们发现，在一定压力下微小面积接触时比较常破坏的材料不适宜做刀子，比较不容易破坏的材料适宜于做刀子。

直到二十世纪初，人们才把压力接触下破坏的难易程度精确化为一个概念：硬度。

人们想了一个办法去确定不同材料的硬度。设想用一种最坚硬的材料做一个锥子（锥子头用给定直径的硬质钢球——布氏硬度，锥子头用张角 120 度的金刚石锥——洛氏硬度，锥子头用张角 138 度的四棱锥——维氏硬度 ），在一定的压力下去刺被测试的材料，用产生破坏的程度（压痕直径——布氏硬度，压痕深度——洛氏硬度，压痕对角线——维氏硬度）来标志所试材料的硬度。通过所施的给定压力（洛氏硬度又分为三档压力，所得到的硬度分别标为 HRA、HRB、HRC），我们就会得到硬度测试办法得到不同的硬度标准。工程师们同时给出了不同硬度系列相互换算的办法。由于篇幅所限这里不具体介绍了，读者可以参考有关文献和材料力学的介绍。

一般认为洛氏硬度在 HRC 为 60 左右的材料所制的刀就是相当不错的刀了。试验表明硬度值增高，材料的脆性也随之增加。所以硬度值过高的材料容易崩刃或折断，不适宜做刀。

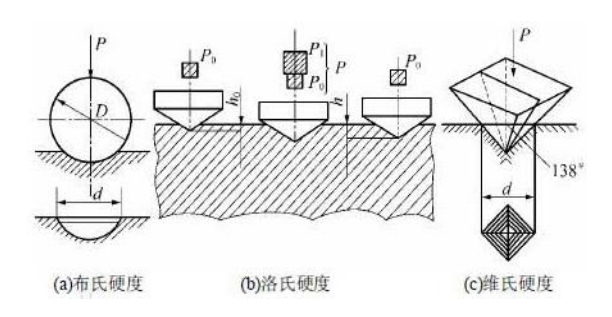


图 12 硬度标准示意

§4 小结

几千年来人类发明和使用过各式各样的刀。因为不同的用处，刀的形状、剖面、大小、长短各不同。

好刀不仅要求锋利，更重要的是材料要好，要使刀在切削或砍剁时刃不崩不锩，刀身不弯不断。材料首先要有足够的硬度，并且又有适当的韧度。

为鉴别材料，人们引进了材料硬度的概念，并且发展了若干检验材料硬度的方法和标准。

由于刀的重要性，迄今改进刀具性能仍然是一类重要的研究课题。高性能合金、高硬度涂层和镀膜、刀体的复合技术、刀体锻造工艺、激光刀具等等。

2022，05，12

